

Optimización de Funciones de una sola variable

Optimizar una función es el proceso que permite encontrar el valor máximo y/o mínimo que puede tomar una función así como aquellos valores de la variable independiente que hacen que la función sea óptima.

Dada la función $y = f(x)$:

¿Cuál es el máximo valor de y ? ¿Cuál es el mínimo valor de y ?

¿Qué valor de " x " hace que " y " sea máximo?

¿Qué valor de " x " hace que " y " sea mínimo?

Para la resolución de problemas de optimización recomendamos seguir el siguiente procedimiento:

1ro. Construir la regla de correspondencia de la función objetivo: $f(x)$

Llamamos función objetivo aquella función que se busca optimizar.

En esta etapa se deberá definir la variable independiente (x) así como determinar el dominio de la función $f(x)$. En este caso consideraremos el dominio dado por $[a,b]$.

Recuerde que la función solo deberá depender de una sola variable.

En ocasiones resulta apropiado hacer un diagrama, tabla o dibujo que represente las relaciones contenidas en el problema.

2do. Calcular la primera derivada de la función objetivo: $f'(x)$

Para ello deberá hacer uso de las reglas de derivación anteriormente estudiadas.

3ro. Plantear las condiciones necesarias: $f'(x)=0$, $f'(x)=NE$

Esta es una condición necesaria para la existencia de un extremo (máximo o mínimo) relativo.

Se recomienda reducir la expresión resultante para facilitar la resolución de la ecuación y el análisis posterior.

4to. Determinar los valores de la variable: x_1, x_2, \dots

Resolviendo las condiciones planteadas en el punto anterior. Estos son los llamados valores críticos de la función. Asegúrese que estos valores pertenezcan al Dominio de la función. En estos valores es posible encontrar el máximo relativo y/o el mínimo relativo de la función.

Tenga en cuenta que el paso 3 es una condición necesaria y no suficiente para la existencia de un máximo o mínimo. Por tanto también es posible que un valor crítico no corresponda a ningún extremo relativo. Eso se determina con el siguiente paso.

5to. Determinar si cada valor crítico corresponde a un máximo o mínimo relativo.

Para ello podemos utilizar alguno de estos dos criterios:

Criterio de la 1ra derivada

Ubicamos los valores críticos (x_1, x_2, \dots) y los extremos del intervalo correspondiente al dominio de la función ($[a, b]$) en una recta numérica. Consideremos $a < x_1 < x_2 < b$.

Por cada uno de los intervalos formados: $[a, x_1[$, $]x_1, x_2[$ y $]x_2, b]$ evaluamos f' en un valor de x comprendido en el intervalo y determinamos el signo resultante de f' .

*Si el signo de f' es positivo, entonces la función f es **creciente** en dicho intervalo. Si el signo de f' es negativo, entonces la función f es **decreciente** en dicho intervalo.*

*Si f **cambia de creciente a decreciente**, entonces para el valor crítico correspondiente la función tiene un **máximo relativo**.*

*Si f cambia de **decreciente a creciente**, entonces para el valor crítico correspondiente la función tiene un **mínimo relativo**.*

Criterio de la 2da derivada

Calculamos la segunda derivada de la función objetivo: $f''(x)$

Evaluamos f'' para cada uno de los valores críticos.

*Si el **signo de f'' es negativo**, entonces para el valor crítico correspondiente la función tiene un **máximo relativo**.*

*Si el **signo de f'' es positivo**, entonces para el valor crítico correspondiente la función tiene un **mínimo relativo**.*

6to. Determinar los extremos absolutos de la función f .

Si en x_1 y x_2 la función f tiene extremos relativos (máximos o mínimos), debemos comparar los valores que toma la función en estos puntos con los que toma la función en los **extremos cerrados** del intervalo correspondiente a su Dominio $[a, b]$.

Es decir, debemos calcular: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(a)$ y $f(b)$. El **mayor** de estos valores será el **máximo absoluto** de la función y el **menor** de ellos será el **mínimo absoluto** de la función.

Tenga en cuenta que el extremo absoluto puede ocurrir tanto en un valor crítico como en un extremo cerrado del intervalo.

Si el Dominio no contiene extremos cerrados, la función es continua en ese intervalo y tenemos solo un extremo relativo, entonces dicho extremo relativo debe ser también el absoluto.