Área de una región limitada entre dos curvas

Al calcular el área de una región limitada por dos curvas se debe decidir vista desde que eje se va a plantear la integral definida correspondiente. O bien vista desde el eje horizontal o bien vista desde el eje vertical. El estudiante debe reconocer ciertas características que le lleven a tomar la decisión más acertada. Si bien se pueden plantear áreas con solo uno de estos casos, una buena observación nos evitaría operaciones engorrosas. Haremos un cuadro comparativo entre los dos casos.

Vista desde el eje horizontal		
Las ecuaciones de las curvas que limitan la región de interés deben estar en términos de "x" $y_1 = f(x)$ $y_2 = g(x)$	La región de interés debe cubrir un intervalo numérico de "x" $a \le x \le b$	Se debe notar claramente en dicho intervalo una curva por encima $(y_1 = f(x))$ y otra por debajo ($y_2 = g(x)$) limitando la región.
$\text{Área} = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$		

Vista desde el eje vertical		
Las ecuaciones de las curvas que limitan la región de interés deben estar en términos de "y" $x_1 = f(y)$ $x_2 = g(y)$	La región de interés debe cubrir un intervalo numérico de "y" $a \le y \le b$	Se debe notar claramente en dicho intervalo una curva por derecha $(x_1 = f(y))$ y otra por izquierda ($x_2 = g(y)$) limitando la región.
$\text{Área} = \int_a^b [f(y)-g(y)]dy$		

Analicemos lo anotado en el cuadro. Las ecuaciones de las curvas constituyen un primer elemento de decisión:

> *Si las ecuaciones de las curvas están en términos de "x", pensaremos en plantear el área vista desde el eje horizontal.*
>
> *Si las ecuaciones de las curvas están en términos de "y", pensaremos en plantear el área vista desde el eje vertical.*

Esto debe tomarse como un primer indicador. Digamos que es condición necesaria, pero no suficiente. El estudiante puede considerar el caso de una curva en términos de "x" que pueda operarse y quedar en términos de "y". Es decir, dada y = f(x) podemos realizar un despeje para tener x = g(y). Pero también podría pensar en lo contrario, una curva en términos de "y" que se opere para dejarla en términos de "x". Sin embargo no siempre se puede despejar una variable en términos de otra, o en ocasiones esto resulta muy trabajoso. Luego, si el despeje es engorroso, tenemos suficiente argumento para pensar en el planteo del área vista desde el eje original. Pero se puede presentar el caso de un despeje simple, pero que nos lleve a una expresión más pesada de integrar que la original. He aquí otro argumento para pensar en el planteo del área vista desde el eje original. De encontrarnos en el caso que da lo mismo trabajar en términos de "x" o de "y" podemos apoyarnos del intervalo de integración para tomar la decisión.

El intervalo de la región de interés debe estar en términos de la variable correspondiente al eje desde donde se va a plantear la integral.

> *Si el área va a ser vista desde el eje horizontal, el intervalo de integración debe estar marcado por los límites de "x".*
>
> *Si el área va a ser vista desde el eje vertical, el intervalo de integración debe estar marcado por los límites de "y".*

Si se trata de dos o mas curvas, con frecuencia los puntos de corte entre ellas nos marcan los límites de integración. Al buscar los puntos de corte obtenemos sus abscisas y sus ordenadas. Por tanto, en este caso, que sea con "x" o con "y" es indiferente. Pensemos el caso en que una de las fronteras de la región de interés es una recta paralela a uno de los ejes coordenados. He aquí un argumento para discriminar uno de los casos. Supongamos que una de las fronteras es una recta horizontal. Eso significa que tiene ecuación de la forma y=k. Tenemos así que un extremo del intervalo de integración sería la ordenada "k". Sea este un límite inferior o superior, es un extremo del intervalo en "y". Encontramos aquí un argumento para pensar en trabajar el área vista desde el eje vertical. Similar razonamiento se puede seguir en el caso de tener una recta vertical x=k como una de las fronteras de la región de interés. En este caso pensaríamos en trabajar el área vista desde el eje horizontal.

El grafico de apoyo que hacemos para visualizar la región de interés también es de mucha ayuda.

> *Cuando queremos plantear el área vista desde el eje horizontal se debe notar claramente una curva encima de otra en el intervalo de la región de interés (ver figura 1).*
>
> *Cuando queremos plantear el área vista desde el eje vertical se debe notar claramente una curva a la derecha de otra en el intervalo de la región de interés (ver figura 2).*

Si el área es vista desde el eje horizontal y la región de interés presenta una curva encima de otras dos curvas, o dos curvas encima de otra, debemos hacer una separación. Esta separación se debe hacer con rectas verticales que pasen por los puntos de corte. Formamos así dos o tres regiones parciales. El área total se encuentra sumando o restando las áreas así formadas. Similar razonamiento seguiremos si se trata de áreas vista desde el eje vertical. Si el área es vista desde el eje vertical y la región de interés presenta una curva a la derecha de otras dos curvas, o dos curvas a la derecha de otra, debemos hacer una separación. Esta separación se debe hacer con rectas horizontales que pasen por los puntos de corte.

Si ocurriera que la región de interés vista desde uno de los ejes nos obliga a hacer más separaciones que vista por el otro, encontramos aquí un argumento para decidir por un determinado caso. Cuanto menor número de separaciones se haga en la región de interés, menos integrales se habrán de plantear, por tanto el ejercicio se haría más simple de resolver.

Figura 1

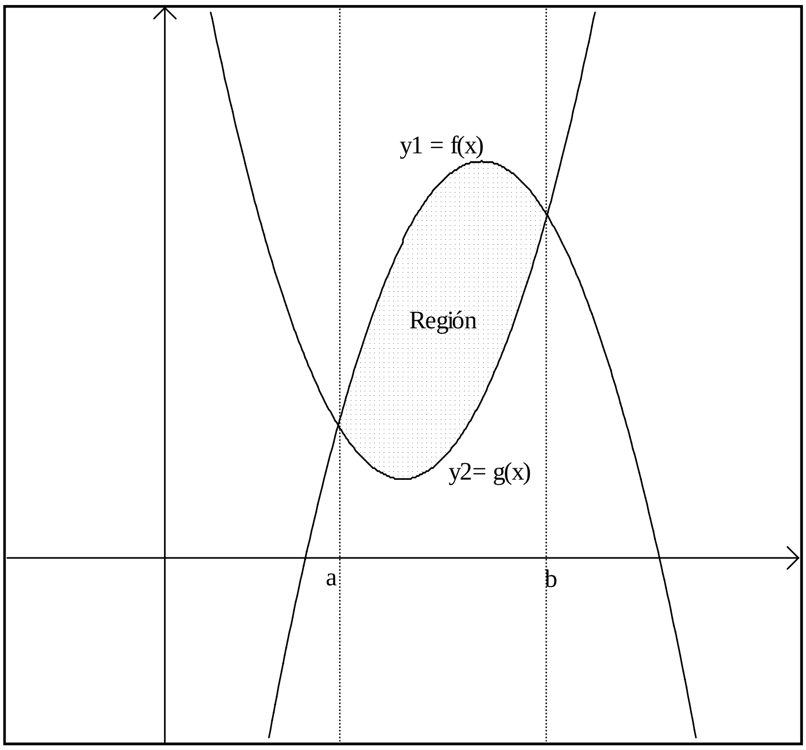
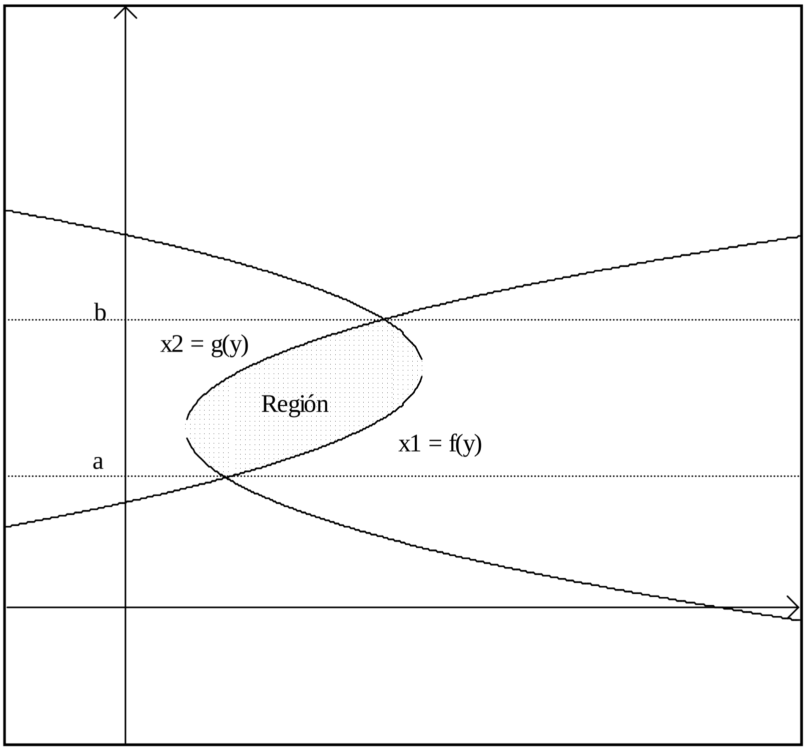


Figura 2



Una vez decidido con que eje se va a trabajar se deberán plantear las integrales correspondientes.

Vista desde el eje horizontal: (ver figura 1)

Región R:	*Intervalo*	$a \leq x \leq b$
	Limita por encima	$y_1 = f(x)$
	Limita por debajo	$y_2 = g(x)$

Área de la región R: $$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Vista desde el eje vertical: (ver figura 2)

Región R:	*Intervalo*	$a \leq y \leq b$
	Limita por derecha	$x_1 = f(y)$
	Limita por izquierda	$x_2 = g(y)$

Área de la región R: $$A = \int_a^b [f(y) - g(y)]dy$$

Al momento de enfrentarse con un determinado ejercicio, el estudiante puede decidir hacerlo de una manera particular. Vista desde el eje horizontal o vista desde el eje vertical. No nos corresponde decir cuál es el mejor método. Cómo se ha expuesto eso depende de las características particulares del ejercicio a resolver. Lo único que hemos pretendido es dar razones válidas acerca del porqué decidir plantear el área vista desde un determinado eje. Muchas veces la ansiedad por resolver un determinado ejercicio nos hace evitar esta etapa de la observación. El tiempo que nos lleva analizar las condiciones del problema se gana al lograr una óptima resolución.