

FUNCIONES HOMOGÉNEAS

Definición

Si la función $z = f(x, y)$ es tal que para toda constante λ se cumple:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y),$$

decimos que z es homogénea de grado "n".

Ejemplo 1: $z = f(x, y) = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^3 + y^3}$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2}{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 xy - \lambda^2 y^2}{\lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 (x^2 + xy - y^2)}{\lambda^3 (x^3 + y^3)}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-1} \left(\frac{x^2 + xy - y^2}{x^3 + y^3} \right)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-1} f(x, y)$$

Como la función $z = f(x, y)$ cumple la definición, decimos que z es homogénea de grado -1 .

Ejemplo 2: $Q = f(k, L) = A k^\alpha L^\beta$

$$f(\lambda k, \lambda L) = A (\lambda k)^\alpha (\lambda L)^\beta$$

$$f(\lambda k, \lambda L) = A (\lambda^\alpha k^\alpha) (\lambda^\beta L^\beta)$$

$$f(\lambda k, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta} (A k^\alpha L^\beta)$$

$$f(\lambda k, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta} f(k, L)$$

Como la función $Q = f(k, L)$ cumple la definición, decimos que z es homogénea de grado $\alpha + \beta$.

Ejemplo 3: Verificar que la función:

$$z = f(x, y) = 7x^3y \ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right) - 5x^2y^2 + 3y^4 e^{\frac{x}{y}}$$

es homogénea de grado 4.

Resolución

$$f(\lambda x, \lambda y) = 7(\lambda x)^3 (\lambda y) \ln\left(\frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x - \lambda y}\right) - 5(\lambda x)^2 (\lambda y)^2 + 3(\lambda y)^4 e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 7(\lambda^3 x^3)(\lambda y) \ln\left(\frac{\lambda(x+y)}{\lambda(x-y)}\right) - 5(\lambda^2 x^2)(\lambda^2 y^2) + 3(\lambda^4 y^4) e^{\frac{x}{y}}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 7\lambda^4 x^3 y \ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right) - 5\lambda^4 x^2 y^2 + 3\lambda^4 y^4 e^{\frac{x}{y}}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^4 \left[7x^3 y \ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right) - 5x^2 y^2 + 3y^4 e^{\frac{x}{y}} \right]$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^4 f(x, y)$$

Como la función $z = f(x, y)$ cumple la definición, decimos que z es homogénea de grado 4.

Propiedad

Si $z = f(x, y)$ es una función homogénea de grado “n”, dicha función se puede expresar como:

$$z = f(x, y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = f(x, y) = y^n h\left(\frac{x}{y}\right)$$

Ejemplo 4: $z = f(x, y) = 5x^2y - 4xy^2 + 2y^3$

Aplicando la definición se puede verificar que “z” es homogénea de grado 3.

Caso 1: Factorizando x^3 tenemos:

$$z = x^3 \left[5 \frac{y}{x} - 4 \frac{y^2}{x^2} + 2 \frac{y^3}{x^3} \right]$$

$$z = x^3 \left[5 \left(\frac{y}{x} \right) - 4 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 2 \left(\frac{y}{x} \right)^3 \right]$$

Si bien la expresión dentro del corchete depende de “x” e “y”, ella se puede considerar como una función que depende de la fracción $\frac{y}{x}$, por lo que podemos escribir:

$$z = x^3 g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Caso 2: Factorizando y^3 tenemos:

$$z = y^3 \left[5 \frac{x^2}{y^2} - 4 \frac{x}{y} + 2 \right]$$

$$z = y^3 \left[5 \left(\frac{x}{y} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{y} \right) + 2 \right]$$

Si bien la expresión dentro del corchete depende de “x” e “y”, ella se puede considerar como una función que depende de la fracción $\frac{x}{y}$, por lo que podemos escribir:

$$z = y^3 h\left(\frac{x}{y}\right)$$

Ejemplo 5: Demostrar que la función $z = f(x,y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right)$ es homogénea de grado “n”.

Resolución

Tenemos: $f(x,y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right)$

Aplicando la definición:

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^n g\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n x^n g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Luego, $z = f(x, y)$ es homogénea de grado “n”.

Primer Teorema de Euler

Si $z = f(x, y)$ es una función homogénea de grado “n” y sus derivadas parciales de primer orden existen, entonces:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = n z$$

Demostración 1

Si $z = f(x, y)$ es una función homogénea de grado “n”, ella se puede escribir como:

$$z = x^n g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = x^n g(x^{-1}y) \quad \dots \text{(I)}$$

De (I) derivamos con respecto a “x”:

Aplicamos la regla del producto

$$\frac{\partial z}{\partial x} = [n x^{n-1}] g(x^{-1}y) + x^n [g'(x^{-1}y) \cdot (-x^{-2}y)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = n x^{n-1} g(x^{-1}y) - x^{n-2} y g'(x^{-1}y)$$

Multiplicamos por “x”:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = n x^n g(x^{-1}y) - x^{n-1} y g'(x^{-1}y) \quad \dots \text{(II)}$$

De (I) derivamos con respecto a “y”:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^n [g'(x^{-1}y) \cdot (x^{-1})]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{n-1} g'(x^{-1}y)$$

Multiplicamos por “y”:

$$y \frac{\partial z}{\partial y} = x^{n-1} y g'(x^{-1}y) \quad \dots \text{(III)}$$

Sumando (II) + (III):

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = n x^n g(x^{-1}y) - x^{n-1} y g'(x^{-1}y) + x^{n-1} y g'(x^{-1}y)$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = n x^n g(x^{-1}y)$$

De (I): $z = x^n g(x^{-1}y)$

Luego,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = n z$$

Con lo que queda demostrado el primer teorema de Euler.

Demostración 2

Si $z = f(x, y)$ es una función homogénea de grado “n” se debe cumplir la definición, es decir: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

Hacemos $U = \lambda x \quad \dots \text{(I)}$

$V = \lambda y \quad \dots \text{(II)}$

Tenemos: $f(U, V) = \lambda^n f(x, y)$

Derivaremos esta igualdad con respecto a λ . En el primer miembro aplicamos la regla de la cadena y en el segundo miembro la derivación es directa.

$$\frac{\partial f}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} = n \lambda^{n-1} f(x, y) \quad \dots \text{(III)}$$

De (I): $\frac{\partial U}{\partial \lambda} = x$ y de (II): $\frac{\partial V}{\partial \lambda} = y$, reemplazando en (III):

$$\frac{\partial f}{\partial U} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial V} \cdot y = n \lambda^{n-1} f(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda x)} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial(\lambda y)} \cdot y = n \lambda^{n-1} f(x, y)$$

$$x \frac{\partial f}{\partial(\lambda x)} + y \frac{\partial f}{\partial(\lambda y)} = n \lambda^{n-1} f(x, y)$$

Si hacemos que λ tome el valor 1, es decir $\lambda = 1$:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y)$$

Y dado que $z = f(x, y)$:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = n z$$

Con lo que queda demostrado el primer teorema de Euler.

Segundo Teorema de Euler

Si $z = f(x, y)$ es una función homogénea de grado "n" y sus derivadas parciales de primer orden existen, entonces:

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = n(n-1)z$$

Demostración 1

Si $z = f(x, y)$ es una función homogénea de grado "n" se debe cumplir el primer teorema de Euler, es decir: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = n z$.

Por comodidad escribiremos el Teorema en la forma:

$$x z_x + y z_y = n z \quad \dots (\alpha)$$

Derivamos (α) con respecto a "x"

$$(1)z_x + x(z_{xx}) + y(z_{xy}) = n z_x$$

$$x z_{xx} + y z_{xy} = n z_x - z_x$$

$$x z_{xx} + y z_{xy} = (n-1)z_x$$

Multiplicamos por "x" esta última igualdad:

$$x^2 z_{xx} + xy z_{xy} = (n-1)x z_x \quad \dots (\beta)$$

Derivamos (α) con respecto a "y"

$$x(z_{xy}) + (1)z_y + y(z_{yy}) = n z_y$$

$$x z_{xy} + y z_{yy} = n z_y - z_y$$

$$x z_{xy} + y z_{yy} = (n-1)z_y$$

Multiplicamos por “y” esta última igualdad:

$$xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = (n-1)yz_y \quad \dots (\theta)$$

Sumamos (β) y (θ):

$$x^2 z_{xx} + xy z_{xy} + xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = (n-1)xz_x + (n-1)yz_y$$

$$x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = (n-1)[xz_x + yz_y]$$

De (α), la expresión en el corchete corresponde a “nz”

$$x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = (n-1)[nz]$$

$$x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = n(n-1)z$$

Es decir,

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = n(n-1)z$$

Con lo que queda demostrado el segundo teorema de Euler.

Demostración 2

Si $z = f(x, y)$ es una función homogénea de grado “n”, ella se puede escribir como:

$$z = x^n g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = x^n g(x^{-1}y) \quad \dots (I)$$

De (I) derivamos con respecto a “x”:

Aplicamos la regla del producto

$$z_x = [nx^{n-1}]g(x^{-1}y) + x^n [g'(x^{-1}y) \cdot (-x^{-2}y)]$$

$$z_x = nx^{n-1}g(x^{-1}y) - x^{n-2}yg'(x^{-1}y)$$

Derivamos z_x con respecto a “x”

$$z_{xx} = [n(n-1)x^{n-2}]g(x^{-1}y) + nx^{n-1}[g'(x^{-1}y) \cdot (-x^{-2}y)] - [(n-2)x^{n-3}y]g'(x^{-1}y) - x^{n-2}y[g''(x^{-1}y) \cdot (-x^{-2}y)]$$

$$z_{xx} = n(n-1)x^{n-2}g(x^{-1}y) - nx^{n-3}yg'(x^{-1}y) - (n-2)x^{n-3}y \cdot g'(x^{-1}y) + x^{n-4}y^2 g''(x^{-1}y)$$

Multiplicamos por “x²”:

$$x^2 z_{xx} = n(n-1)x^n g(x^{-1}y) - nx^{n-1}yg'(x^{-1}y) - (n-2)x^{n-1}y \cdot g'(x^{-1}y) + x^{n-2}y^2 g''(x^{-1}y)$$

$$x^2 z_{xx} = n(n-1)x^n g(x^{-1}y) - (2n-2)x^{n-1}yg'(x^{-1}y) + x^{n-2}y^2 g''(x^{-1}y) \quad \dots \text{ (II)}$$

Derivamos z_x con respecto a “y”

$$z_{xy} = nx^{n-1} [g'(x^{-1}y) \cdot (x^{-1})] - [x^{n-2}]g'(x^{-1}y) - x^{n-2}y [g''(x^{-1}y) \cdot (x^{-1})]$$

$$z_{xy} = nx^{n-2} g'(x^{-1}y) - x^{n-2} \cdot g'(x^{-1}y) - x^{n-3}y g''(x^{-1}y)$$

Multiplicamos por “2xy”:

$$2xy z_{xy} = 2nx^{n-1}yg'(x^{-1}y) - 2x^{n-1}y \cdot g'(x^{-1}y) - 2x^{n-2}y^2 g''(x^{-1}y)$$

$$2xy z_{xy} = (2n-2)x^{n-1}yg'(x^{-1}y) - 2x^{n-2}y^2 g''(x^{-1}y) \quad \dots \text{ (III)}$$

De (I) derivamos con respecto a “y”:

$$z_y = x^n [g'(x^{-1}y) \cdot (x^{-1})]$$

$$z_y = x^{n-1} g'(x^{-1}y)$$

Derivamos z_y con respecto a “y”

$$z_{yy} = x^{n-1} [g''(x^{-1}y) \cdot (x^{-1})]$$

$$z_{yy} = x^{n-2} g''(x^{-1}y)$$

Multiplicamos por “y²”:

$$y^2 z_{yy} = x^{n-2}y^2 g''(x^{-1}y) \quad \dots \text{ (IV)}$$

Sumando (II), (III) y (IV):

$$\begin{aligned} x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} &= n(n-1)x^n g(x^{-1}y) - (2n-2)x^{n-1}yg'(x^{-1}y) + x^{n-2}y^2 g''(x^{-1}y) \\ &\quad + (2n-2)x^{n-1}yg'(x^{-1}y) - 2x^{n-2}y^2 g''(x^{-1}y) \\ &\quad + x^{n-2}y^2 g''(x^{-1}y) \end{aligned}$$

$$x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = n(n-1)x^n g(x^{-1}y)$$

$$x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = n(n-1)z$$

Con lo que queda demostrado el segundo teorema de Euler.