

## INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Integrar:

a.  $\int \frac{3x+9}{x^3+2x^2-x-2} dx$

b.  $\int \frac{x^2-4x+1}{x^4-x^3+x-1} dx$

c.  $\int \frac{x^3+x}{x^4-16} dx$

d.  $\int \frac{(x^2+6x+1)}{(x^2-1)^2} dx$

e.  $\int \frac{e^{3t}-5e^{2t}-8e^t}{e^{3t}+2e^{2t}-e^t-2} dt$

f.  $\int \frac{-\ln x+2}{x(\ln^3 x+\ln^2 x+2\ln x+2)} dx$

### Resolución

---

Recuerde:

Cuando tenemos la integral de una fracción de polinomios donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador y además el polinomio del denominador es factorizable, lo conveniente es descomponer la fracción original en una suma de fracciones más simples.

A este proceso se le conoce como descomposición en fracciones parciales.

Explicaremos la metodología en el siguiente ejercicio:

1a.  $I = \int \frac{3x+9}{x^3+2x^2-x-2} dx$

Como se puede notar, tenemos una fracción de polinomios. El grado del polinomio del numerador es 1 y el grado del polinomio del denominador es 3. Esto satisface la primera condición para la descomposición en fracciones parciales. La segunda es que el denominador sea factorizable.

Factorizamos el denominador:

$$I = \int \frac{3x+9}{(x+2)(x+1)(x-1)} dx \quad \dots (\alpha)$$

En el integrando tenemos tres factores en el denominador. En este caso tres factores lineales (grado 1). Luego, la fracción original se puede descomponer en la suma de tres fracciones más simples.

$$\frac{3x+9}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} \quad \dots (\beta)$$

Tenga en cuenta lo siguiente:

La fracción original se descompondrá en tantas fracciones como número de factores contenga el denominador.

Si el grado del denominador de la fracción parcial es 1, entonces el grado del numerador de dicha fracción parcial es 0, es decir una constante.

En nuestro ejercicio los denominadores de las tres fracciones parciales tienen grado 1 por lo que sus respectivos numeradores son constantes. Como - por ahora - estas constantes son desconocidas, las hemos representado con las letras A, B y C tal como se presentó en (β).

De (β), damos mínimo común múltiplo y simplificamos el denominador común:

$$3x + 9 = A(x + 1)(x - 1) + B(x + 2)(x - 1) + C(x + 2)(x + 1) \quad \dots (\theta)$$

Ahora debemos encontrar los valores de las constantes A, B y C. Una forma bastante directa de hacerlo consiste en asignar valores a la variable "x" de tal manera que obtengamos ecuaciones sencillas de resolver. Se recomienda asignarle aquellos valores que anulan los factores.

En nuestro caso los factores son (x + 2), (x + 1) y (x - 1) por lo que recomendamos trabajar con x = -2, x = -1 y x = 1.

$$\text{Con } x = -2 \text{ en } (\theta): \quad 3(-2) + 9 = A(-1)(-3)$$

$$A = 1$$

$$\text{Con } x = -1 \text{ en } (\theta): \quad 3(-1) + 9 = B(1)(-2)$$

$$B = -3$$

$$\text{Con } x = 1 \text{ en } (\theta): \quad 3(1) + 9 = C(3)(2)$$

$$C = 2$$

Con A = 1, B = -3 y C = 2 en (β):

$$\frac{3x + 9}{(x + 2)(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{x + 2} + \frac{-3}{x + 1} + \frac{2}{x - 1} \quad \dots (\phi)$$

Nótese que aún no hemos resuelto la integral. Lo único que se ha hecho es reescribir la fracción original como una suma de fracciones más simples lo que facilitará la integración.

Reemplazamos  $(\phi)$  en  $(\alpha)$ :

$$I = \int \left[ \frac{1}{x+2} + \frac{-3}{x+1} + \frac{2}{x-1} \right] dx$$

Aplicando la propiedad distributiva:

$$I = \int \frac{1}{x+2} dx - \int \frac{3}{x+1} dx + \int \frac{2}{x-1} dx$$

$$I = \int \frac{1}{x+2} dx - 3 \int \frac{1}{x+1} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx$$

Estas tres últimas integrales son directas por lo que finalmente podemos escribir:

$$I = \ln|x+2| - 3\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C \quad \text{Respuesta}$$

NOTA: En los siguientes ejercicios aplicaremos la misma metodología aunque de manera más abreviada.

1b.  $I = \int \frac{x^2 - 4x + 1}{x^4 - x^3 + x - 1} dx$

$$I = \int \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)} dx$$

Descomponemos el integrando:

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1} \quad \dots (\alpha)$$

OBSERVACIÓN:

Si el denominador de la fracción parcial tiene grado 2, el grado del numerador correspondiente es 1.

En general, al descomponer en fracciones parciales tenga en cuenta que el grado del numerador debe ser uno menos que el grado del denominador. Esta regla no es válida si tenemos factores repetidos.

De  $(\alpha)$ , damos M.C.M. y simplificamos el denominador común.

$$x^2 - 4x + 1 = A(x+1)(x^2 - x + 1) + B(x-1)(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x-1)(x+1)$$

$$\text{Con } x = -1: \quad 6 = B(-2)(3)$$

$$B = -1$$

$$\text{Con } x = 1: \quad -2 = A(2)(1)$$

$$A = -1$$

$$\text{Con } x = 0: \quad 1 = A(1)(1) + B(-1)(1) + (D)(-1)(1)$$

$$1 = -1 + 1 - D$$

$$D = -1$$

$$\text{Con } x = 2: \quad -3 = A(3)(3) + B(1)(3) + (2C + D)(1)(3)$$

$$-3 = -9 - 3 + 6C - 3$$

$$C = 2$$

NOTA: El estudiante puede optar por otras formas de encontrar el valor de las constantes. Entre ellos tenemos el igualar los coeficientes de las variables del mismo grado. Más allá de la forma como se encuentren los valores de las constantes estos deben arrojar el mismo valor.

Con  $A = -1$ ,  $B = -1$ ,  $C = 2$  y  $D = -1$  en  $(\alpha)$ :

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{(x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2 - x + 1}$$

Reemplazando en la integral original:

$$I = \int \left[ \frac{-1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} \right] dx$$

$$I = -\int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} dx$$

Lo que finalmente resulta:

$$I = -\ln|x-1| - \ln|x+1| + \ln|x^2 - x + 1| + C \quad \text{Respuesta}$$

1c.  $I = \int \frac{x^3 + x}{x^4 - 16} dx$

$$I = \int \frac{x^3 + x}{(x+2)(x-2)(x^2 + 4)} dx$$

Descomponemos el integrando:

$$\frac{x^3 + x}{(x+2)(x-2)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2 + 4} \quad \dots (\alpha)$$

Damos M.C.M. y simplificamos el denominador común.

$$x^3 + x = A(x-2)(x^2+4) + B(x+2)(x^2+4) + (Cx+D)(x+2)(x-2)$$

$$\text{Con } x = 2: \quad 10 = B(4)(8)$$

$$B = 5/16$$

$$\text{Con } x = -2: \quad -10 = B(-4)(8)$$

$$A = 5/16$$

$$\text{Con } x = 0: \quad 0 = A(-2)(4) + B(2)(4) + D(2)(-2)$$

$$0 = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 4D$$

$$D = 0$$

$$\text{Con } x = 1: \quad 2 = A(-1)(5) + B(3)(5) + (C+D)(3)(-1)$$

$$2 = -\frac{25}{16} + \frac{75}{16} - 3(C+0)$$

$$C = \frac{3}{8}$$

Reemplazando en la integral original:

$$I = \int \left[ \frac{5/16}{x+2} + \frac{5/16}{x-2} + \frac{(3/8)x}{x^2+4} \right] dx$$

$$I = \frac{5}{16} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{5}{16} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{3}{8} \int \frac{x}{x^2+4} dx$$

$$I = \frac{5}{16} \ln|x+2| + \frac{5}{16} \ln|x-2| + \frac{3}{8} \left( \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx \right)$$

$$I = \frac{5}{16} \ln|x+2| + \frac{5}{16} \ln|x-2| + \frac{3}{16} \ln|x^2+4| + C \quad \text{Respuesta}$$

$$1d. \quad I = \int \frac{x^2 + 6x + 1}{(x^2 - 1)^2} dx$$

$$I = \int \frac{x^2 + 6x + 1}{((x+1)(x-1))^2} dx$$

$$I = \int \frac{x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2(x-1)^2} dx$$

Descomponemos el integrando:

$$\frac{x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} \quad \dots (\alpha)$$

Damos M.C.M. y simplificamos el denominador común.

$$x^2 + 6x + 1 = A(x+1)(x-1)^2 + B(x-1)^2 + C(x-1)(x+1)^2 + D(x+1)^2$$

$$\text{Con } x = -1: \quad -4 = B(-2)^2$$

$$B = -1$$

$$\text{Con } x = 1: \quad 8 = D(2)^2$$

$$D = 2$$

$$\text{Con } x = 0: \quad 1 = A(1)(-1)^2 + B(-1)^2 + C(-1)(1)^2 + D(1)^2$$

$$1 = A - 1 - C + 2$$

$$A - C = 0 \quad \dots \text{(I)}$$

$$\text{Con } x = 2: \quad 17 = A(3)(1)^2 + B(1)^2 + C(1)(3)^2 + D(3)^2$$

$$17 = 3A - 1 + 9C + 18$$

$$A + 3C = 0 \quad \dots \text{(II)}$$

$$\text{De (I) y (II): } A = 0; C = 0$$

Reemplazando en la integral original:

$$I = \int \left[ \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x-1)^2} \right] dx$$

$$I = -\int (x+1)^{-2} dx + 2\int (x-1)^{-2} dx$$

$$I = -\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + 2\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C$$

$$I = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-1} + C$$

$$1e. \quad I = \int \frac{e^{3t} - 5e^{2t} - 8e^t}{e^{3t} + 2e^{2t} - e^t - 2} dt$$

Dado que tenemos una expresión repetida ( $e^t$ ), haremos un cambio de variable.

$$\text{Hacemos:} \quad e^t = x$$

$$\text{Diferenciamos:} \quad e^t dt = dx$$

$$dt = \frac{dx}{e^t}$$

$$dt = \frac{dx}{x}$$

Reemplazamos en la integral dada:

$$I = \int \frac{x^3 - 5x^2 - 8x}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \frac{dx}{x}$$

$$I = \int \frac{x^2 - 5x - 8}{(x+2)(x+1)(x-1)} dx \quad \dots (\theta)$$

Descomponemos el integrando en fracciones parciales:

$$\frac{x^2 - 5x - 8}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

$$x^2 - 5x - 8 = A(x+1)(x-1) + B(x+2)(x-1) + C(x+2)(x+1)$$

$$\text{Con } x = 1: \quad -12 = C(3)(2) \quad C = -2$$

$$\text{Con } x = -1: \quad -2 = B(1)(-2) \quad B = 1$$

$$\text{Con } x = -2: \quad 6 = A(-1)(-3) \quad A = 2$$

Reemplazamos las fracciones obtenidas en ( $\theta$ ):

$$I = \int \left[ \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{x-1} \right] dx$$

$$I = 2 \int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$I = 2 \ln|x+2| + \ln|x+1| - 2 \ln|x-1| + C$$

$$\text{Luego,} \quad I = 2 \ln|e^t + 2| + \ln|e^t + 1| - 2 \ln|e^t - 1| + C$$

$$1f. \quad I = \int \frac{-\ln x + 2}{x(\ln^3 x + \ln^2 x + 2\ln x + 2)} dx$$

Dado que tenemos una expresión repetida ( $\ln x$ ), haremos un cambio de variable.

$$\text{Hacemos:} \quad \ln x = t$$

$$\text{Diferenciamos:} \quad \frac{1}{x} dx = dt$$

Reemplazamos en la integral dada:

$$I = \int \frac{-t + 2}{t^3 + t^2 + 2t + 2} dt$$

$$I = \int \frac{-t + 2}{(t+1)(t^2 + 2)} dt \quad \dots (\theta)$$

Descomponemos el integrando en fracciones parciales:

$$\frac{-t + 2}{(t+1)(t^2 + 2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt + C}{t^2 + 2}$$

$$-t + 2 = A(t^2 + 2) + (Bt + C)(t + 1)$$

$$\text{Con } t = -1: \quad 3 = A(3) \quad A = 1$$

$$\text{Con } t = 0: \quad 2 = A(2) + C(1) \quad 2 = 2 + C$$

$$C = 0$$

$$\text{Con } t = 1: \quad 1 = A(3) + (B + C)(2)$$

$$1 = 3 + 2(B + 0)$$

$$B = -1$$

Reemplazamos las fracciones obtenidas en  $(\theta)$ :

$$I = \int \left[ \frac{1}{t+1} + \frac{-t}{t^2 + 2} \right] dt$$

$$I = \int \frac{1}{t+1} dt - \int \frac{t}{t^2 + 2} dt$$

$$I = \ln|t+1| - \frac{1}{2} \ln|t^2 + 2| + C$$