

## ANÁLISIS DE UNA FUNCIÓN

### Pregunta 1

En los siguientes ejercicios, halle dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos:

a.  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 9$

b.  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

c.  $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$

d.  $f(x) = e^x + 4e^{-x}$

### Resolución

---

1a.  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 9$

Dominio:  $f$  es una función polinómica, por tanto está definida para todo valor real de "x".

$$\text{Dom } f: \quad x \in \mathbb{R}$$

Primera derivada:  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

Si  $x = a$  pertenece al Dominio de una función  $f(x)$ , decimos que  $x = a$  es un valor crítico para  $f$  si

$$f'(a) = 0 \quad \text{o} \quad f'(a) = \text{No existe}$$

Si  $x = a$  es un valor crítico para  $f$ , el punto  $(a, f(a))$  es un punto crítico para  $f$ . En un punto crítico, puede haber un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de ellos.

Planteamos:

i)  $f'(x) = 0$                        $6x^2 - 6x - 12 = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

De donde:  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -1$

ii)  $f'(x) = \text{NE}$                        $6x^2 - 6x - 12 = \text{NE}$

$$f'(x) \text{ existe para todo } x \in \mathbb{R}$$

Tenemos dos valores críticos:  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -1$

$$\text{Con } x_1 = 2: f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) - 9$$

$$f(2) = -29$$

$(2, -29)$  *Punto crítico*

$$\text{Con } x_1 = -1: f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) - 9$$

$$f(-1) = -2$$

$(-1, -2)$  *Punto crítico*

Llevamos los valores críticos a la recta real y analizamos los signos de  $f'(x)$  en cada uno de los intervalos formados.

<i>Signos de <math>f'(x)</math></i>		<i>Positivo</i>	<i>Negativo</i>	<i>Positivo</i>	
$x$	$-\infty$		$-1$	$2$	$+\infty$

Si  $f'(x) > 0$  en un intervalo  $I$ , decimos que  $f$  es creciente en dicho intervalo.

Si  $f'(x) < 0$  en un intervalo  $I$ , decimos que  $f$  es decreciente en dicho intervalo.

Intervalos de crecimiento:  $]-\infty, -1[ \cup ]2, +\infty[$

Intervalos de decrecimiento:  $] -1, 2[$

Al pasar por  $x_1 = -1$  la función pasa de creciente a decreciente, luego en  $x_1 = -1$  tenemos un máximo relativo.

$$f_{\max} = f(-1) = -2 \quad \text{Máximo relativo para } f$$

Al pasar por  $x_2 = 2$  la función pasa de decreciente a creciente, luego en  $x_2 = 2$  tenemos un mínimo relativo.

$$f_{\min} = f(2) = -29 \quad \text{Mínimo relativo para } f$$

1b.  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Dominio: Debido al logaritmo natural:  $x > 0$

Debido al denominador:  $\ln x \neq 0$

$$x \neq 1$$

Dom f:  $x \in ] 0, +\infty [ - \{ 1 \}$

Primera derivada:  $f'(x) = \frac{(1)\ln x - x\left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2}$

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

Planteamos:

i)  $f'(x) = 0$   $\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0$

$$\ln x - 1 = 0$$

$$\ln x = 1$$

De donde:  $x_1 = e$

ii)  $f'(x) = \text{NE}$   $\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = \text{NE}$

$$\ln x = 0$$

$$x = 1 \quad x = 1 \notin \text{Dom } f$$

Tenemos un valor crítico:  $x_1 = e$

Con  $x_1 = e$ :  $f(e) = \frac{e}{\ln e}$

$$f(e) = e$$

$(e, e)$  *Punto crítico*

Llevamos este valor crítico a la recta real y analizamos los signos de  $f'(x)$  en cada uno de los intervalos formados.

<i>Signos de <math>f'(x)</math></i>	<i>Negativo</i>	<i>Positivo</i>
$x$	$0$	$e$
	$+ \infty$	

Intervalo de crecimiento:  $]e, +\infty[$

Intervalos de decrecimiento:  $]0, e[$

Al pasar por  $x_1 = e$  la función pasa de decreciente a creciente, luego en  $x_1 = e$  tenemos un mínimo relativo.

$$f_{\min} = f(e) = e \text{ Mínimo relativo para } f$$

1c.  $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$$

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$$

Dominio: La función está definida para todo valor real de "x".

$$\text{Dom } f: x \in \mathbb{R}$$

Primera derivada:  $f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left[ 5x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} \right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left[ \frac{5x-2}{x^{\frac{1}{3}}} \right]$$

Planteamos:

$$\text{i) } f'(x) = 0 \quad \frac{1}{3} \left[ \frac{5x-2}{x^{\frac{1}{3}}} \right] = 0$$

$$5x - 2 = 0$$

$$x_1 = \frac{2}{5}$$

$$\text{ii) } f'(x) = \text{NE} \quad \frac{1}{3} \left[ \frac{5x-2}{x^{\frac{1}{3}}} \right] = \text{NE}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$x_2 = 0$$

Tenemos dos valores críticos:  $x_1 = \frac{2}{5}$ ,  $x_2 = 0$

$$\text{Con } x_1 = \frac{2}{5}: f\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}} - \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = -0.32$$

$$\left(\frac{2}{5}, -0.32\right) \quad \textit{Punto crítico}$$

$$\text{Con } x_2 = 0: f(0) = (0)^{\frac{5}{3}} - (0)^{\frac{2}{3}}$$

$$f(0) = 0$$

$$(0,0) \quad \textit{Punto crítico}$$

Llevamos estos valores críticos a la recta real y analizamos los signos de  $f'(x)$  en cada uno de los intervalos formados.

Signos de $f'(x)$	Positivo	Negativo	Positivo	
x	$-\infty$	0	$2/5$	$+\infty$

Intervalos de crecimiento:  $]-\infty, 0[ \cup ]2/5, +\infty[$

Intervalos de decrecimiento:  $]0, 2/5[$

Al pasar por  $x_1 = 0$  la función pasa de creciente a decreciente, luego en  $x_1 = 0$  tenemos un máximo relativo.

$$f_{\max} = f(0) = 0 \quad \text{Máximo relativo para } f$$

Al pasar por  $x_2 = 2/5$  la función pasa de decreciente a creciente, luego en  $x_2 = 2/5$  tenemos un mínimo relativo.

$$f_{\min} = f(2/5) = -0.32 \quad \text{Mínimo relativo para } f$$

1e.  $f(x) = e^x + 4e^{-x}$

Dominio: La función está definida para todo valor real de "x".

$$\text{Dom } f: \quad x \in \mathbb{R}$$

Primera derivada:  $f'(x) = e^x + 4e^{-x}(-1)$

$$f'(x) = e^x - 4e^{-x}$$

$$f'(x) = e^x - \frac{4}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 4}{e^x}$$

Planteamos:

$$\text{i) } f'(x) = 0 \quad \frac{e^{2x} - 4}{e^x} = 0$$

$$e^{2x} - 4 = 0$$

$$e^{2x} = 4$$

$$2x = \ln 4$$

$$x = \frac{\ln 2^2}{2}$$

$$x = \frac{2 \ln 2}{2}$$

$$x_1 = \ln 2$$

$$\text{ii) } f'(x) = \text{NE} \quad \frac{e^{2x} - 4}{e^x} = \text{NE}$$

Dado que  $e^x > 0$ ,  $f'(x)$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}$

Tenemos un valor crítico:  $x_1 = \ln 2$

$$\text{Con } x_1 = \ln 2: \quad f(\ln 2) = e^{\ln 2} + 4e^{-\ln 2}$$

$$f(\ln 2) = e^{\ln 2} + 4e^{\ln 2^{-1}}$$

$$f(\ln 2) = 2 + 4(2^{-1})$$

$$f(\ln 2) = 4$$

$$(\ln 2, 4) \quad \textit{Punto crítico}$$

Llevamos este valor crítico a la recta real y analizamos los signos de  $f'(x)$  en cada uno de los intervalos formados.

<i>Signos de <math>f'(x)</math></i>	<i>Negativo</i>	<i>Positivo</i>
$x$	$-\infty$	$+\infty$
	$\ln 2$	

Intervalo de crecimiento:  $] \ln 2, +\infty [$

Intervalos de decrecimiento:  $] 0, \ln 2 [$

Al pasar por  $x_1 = \ln 2$  la función pasa de decreciente a creciente, luego en  $x_1 = \ln 2$  tenemos un mínimo relativo.

$$f_{\min} = f(\ln 2) = 4 \quad \textit{Mínimo relativo para } f$$

## Pregunta 2

Halle los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado:

a.  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$ ,  $x \in [-2, 6]$

b.  $f(x) = x + \sqrt{1-x}$ ,  $x \in [-3, 1]$

c.  $f(x) = x \ln^2 x$ ,  $x \in [e^{-2}, e]$

## Resolución

---

Si  $f$  es continua sobre un intervalo cerrado  $[a, b]$  entonces  $f$  alcanza un valor máximo y un valor mínimo absoluto en dicho intervalo.

Para determinar los extremos absolutos de una función, proceda como en el ejercicio 1 y encuentre los extremos relativos. Luego debemos comparar los valores que adopta la función en los valores críticos (extremos relativos) con los que adopta la función en los extremos cerrados del intervalo. El mayor valor obtenido será el máximo absoluto y el menor valor obtenido será el mínimo absoluto.

2a.  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$ ,  $x \in [-2, 6]$

Dominio:  $x \in [-2, 6]$

Primera derivada:  $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

Planteamos:

i)  $f'(x) = 0$   $3x^2 - 18x + 15 = 0$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

De donde:  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 5$

ii)  $f'(x) = \text{NE}$   $x^2 - 6x + 5 = \text{NE}$

$f'(x)$  existe para todo  $x \in \text{Dom } f$

Tenemos dos valores críticos:  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 5$

Con  $x_1 = 1$ :  $f(1) = (1)^3 - 9(1)^2 + 15(1) + 3$

$$f(1) = 10$$

$(1, 10)$  *Punto crítico*

$$\text{Con } x_2 = 5: f(5) = (5)^3 - 9(5)^2 + 15(5) + 3$$

$$f(5) = -22$$

$$(5, -22) \quad \text{Punto crítico}$$

Llevamos los valores críticos a la recta real y analizamos los signos de  $f'(x)$  en cada uno de los intervalos formados.

<i>Signos de <math>f'(x)</math></i>	<i>Positivo</i>	<i>Negativo</i>	<i>Positivo</i>
$x$	-2	1	5
		6	

Al pasar por  $x_1 = 1$  la función pasa de creciente a decreciente, luego en  $x_1 = 1$  tenemos un máximo relativo.

$$f_{\max} = f(1) = 10 \quad \text{Máximo relativo para } f$$

Al pasar por  $x_2 = 5$  la función pasa de decreciente a creciente, luego en  $x_2 = 5$  tenemos un mínimo relativo.

$$f_{\min} = f(5) = -22 \quad \text{Mínimo relativo para } f$$

Compararemos los extremos relativos  $f(1) = 10$  y  $f(5) = -22$  con los valores que adopta la función en los extremos cerrados del intervalo  $f(-2)$  y  $f(6)$ . El mayor valor obtenido será el máximo absoluto y el menor valor obtenido será el mínimo absoluto.

$x$	$f(x)$	<b>Conclusión</b>
-2	-71	<i>Mínimo absoluto</i>
1	10	<i>Máximo absoluto</i>
5	-22	
6	-15	

2b.  $f(x) = x + \sqrt{1-x}$ ,  $x \in [-3, 1]$

Dominio:  $x \in [-3, 1]$

Primera derivada:  $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1-x} - 1}{2\sqrt{1-x}}$$

Planteamos:

$$\text{i) } f'(x) = 0 \quad \frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}} = 0$$

$$2\sqrt{1-x}-1 = 0$$

$$\text{De donde: } x_1 = 3/4$$

$$\text{ii) } f'(x) = \text{NE} \quad \frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}} = \text{NE}$$

$$2\sqrt{1-x} = 0$$

$$\text{De donde: } x_2 = 1$$

Tenemos dos valores críticos:  $x_1 = 3/4$ ;  $x_2 = 1$

$$\text{Con } x_1 = 3/4: \quad f(3/4) = (3/4) + \sqrt{1-(3/4)}$$

$$f(3/4) = 5/4$$

$$(3/4, 5/4) \quad \textit{Punto crítico}$$

$$\text{Con } x_2 = 1: \quad f(1) = (1) + \sqrt{1-(1)}$$

$$f(1) = 1$$

$$(1, 1) \quad \textit{Punto crítico}$$

Llevamos los valores críticos a la recta real y analizamos los signos de  $f'(x)$  en cada uno de los intervalos formados.

Signos de $f'(x)$	Positivo	Negativo
$x$	$-3 \quad 3/4$	$1$

Al pasar por  $x_1 = 3/4$  la función pasa de creciente a decreciente, luego en  $x_1 = 3/4$  tenemos un máximo relativo.

$$f_{\max} = f(3/4) = 5/4 \quad \textit{Máximo relativo para } f$$

Nótese que en  $x_2 = 1$  no se presenta un extremo relativo.

Compararemos el extremo relativo  $f(3/4) = 5/4$  con los valores que adopta la función en los extremos cerrados del intervalo  $f(-3)$  y  $f(1)$ . El mayor valor obtenido será el máximo absoluto y el menor valor obtenido será el mínimo absoluto.

x	f(x)	Conclusión
-3	-1	Mínimo absoluto
3/4	5/4	Máximo absoluto
1	1	

2c.  $f(x) = x \ln^2 x$ ,  $x \in [e^{-2}, e]$

Dominio:  $x \in [e^{-2}, e]$

Primera derivada:  $f'(x) = (1) \ln^2 x + x \left[ 2 \ln x \left( \frac{1}{x} \right) \right]$

$$f'(x) = \ln x (\ln x + 2)$$

Planteamos:

i)  $f'(x) = 0$   $f'(x) = \ln x (\ln x + 2) = 0$

$$\ln x = 0 \vee \ln x = -2$$

De donde:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = e^{-2}$

ii)  $f'(x) = \text{NE}$   $\ln x (\ln x + 2) = \text{NE}$

$f'(x)$  existe para todo  $x \in \text{Dom } f$

Tenemos dos valores críticos:  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = e^{-2}$

Con  $x_1 = 1$ :  $f(1) = (1) \ln^2(1)$

$$f(1) = 0$$

$(1, 0)$  Punto crítico

Con  $x_2 = e^{-2}$ :  $f(e^{-2}) = (e^{-2}) \ln^2(e^{-2})$

$$f(e^{-2}) = 4e^{-2}$$

$(e^{-2}, 4e^{-2})$  Punto crítico

Llevamos los valores críticos a la recta real y analizamos los signos de  $f'(x)$  en cada uno de los intervalos formados.

<i>Signos de <math>f'(x)</math></i>	<i>Negativo</i>	<i>Positivo</i>
$x$	$e^{-2}$	$e$

Al pasar por  $x_1 = 1$  la función pasa de decreciente a creciente, luego en  $x_1 = 1$  tenemos un mínimo relativo.

$$f_{\min} = f(1) = 0 \quad \text{Mínimo relativo para } f$$

Nótese que en  $x_2 = e^{-2}$  no se presenta un extremo relativo.

Compararemos el extremo relativo  $f(1) = 0$  con los valores que adopta la función en los extremos cerrados del intervalo  $f(e^{-2})$  y  $f(e)$ . El mayor valor obtenido será el máximo absoluto y el menor valor obtenido será el mínimo absoluto.

$x$	$f(x)$	<b>Conclusión</b>
$e^{-2}$	$4e^{-2}$	
1	0	<i>Mínimo absoluto</i>
e	e	<i>Máximo absoluto</i>

### Pregunta 3

En los siguientes ejercicios, determinar: dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y puntos de inflexión, y grafique.

a.  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$

b.  $f(x) = x^2 e^x$

### Resolución

3a.  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$

Dominio: Debido al logaritmo natural:  $x > 0$

Debido al denominador:  $x \neq 0$

Dom f:  $x \in ] 0, +\infty [$

Primera derivada:  $f'(x) = \frac{\left[ 2 \ln x \left( \frac{1}{x} \right) \right] (x) - \ln^2 x (1)}{(x)^2}$

$$f'(x) = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}$$

Planteamos:

i)  $f'(x) = 0$   $\frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} = 0$

$$\ln x (2 - \ln x) = 0$$

$$\ln x = 0 \vee \ln x = 2$$

De donde:  $x_1 = 1, x_2 = e^2$

ii)  $f'(x) = \text{NE}$   $\frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} = \text{NE}$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0 \quad x = 0 \notin \text{Dom } f$$

Tenemos dos valores críticos:  $x_1 = 1, x_2 = e^2$

$$\text{Con } x_1 = 1: f(1) = \frac{\ln^2(1)}{(1)}$$

$$f(1) = 0$$

$(1, 0)$  *Punto crítico*

$$\text{Con } x_2 = e^2: f(e^2) = \frac{\ln^2(e^2)}{(e^2)}$$

$$f(e^2) = 4e^{-2}$$

$(e^2, 4e^{-2})$  *Punto crítico*

Llevamos estos valores críticos a la recta real y analizamos los signos de  $f'(x)$  en cada uno de los intervalos formados.

<i>Signos de <math>f'(x)</math></i>	<i>Negativo</i>	<i>Positivo</i>	<i>Negativo</i>
$x$	0	1	$e^2$ <span style="float: right;"><math>+\infty</math></span>

Intervalo de crecimiento:  $]1, e^2 [$

Intervalos de decrecimiento:  $]0, 1[ \cup ]e^2, +\infty [$

Al pasar por  $x_1 = 1$  la función pasa de decreciente a creciente, luego en  $x_1 = 1$  tenemos un mínimo relativo.

$$f_{\min} = f(1) = 0 \quad \text{Mínimo relativo para } f$$

Al pasar por  $x_2 = e^2$  la función pasa de creciente a decreciente, luego en  $x_2 = e^2$  tenemos un máximo relativo.

$$f_{\max} = f(e^2) = 4e^{-2} \quad \text{Máximo relativo para } f$$

Segunda derivada: 
$$f''(x) = \frac{\left(2 \frac{1}{x} - 2 \ln x \left(\frac{1}{x}\right)\right)(x^2) - (2 \ln x - \ln^2 x)(2x)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{2 \ln^2 x - 6 \ln x + 2}{x^3}$$

Planteamos:

$$i) f''(x) = 0 \quad \frac{2 \ln^2 x - 6 \ln x + 2}{x^3} = 0$$

$$\ln x = 0.4 \vee \ln x = 2.6$$

$$\text{De donde: } x_3 = e^{0.4}, x_4 = e^{2.6}$$

$$ii) f''(x) = \text{NE} \quad \frac{4 \ln^2 x - 6 \ln x + 2}{x^3} = \text{NE}$$

$$x^3 = 0$$

$$x = 0 \quad x = 0 \notin \text{Dom } f$$

$$\text{Con } x_3 = e^{0.4}: \quad f(e^{0.4}) = \frac{\ln^2(e^{0.4})}{(e^{0.4})}$$

$$f(e^{0.4}) = 0.2 e^{-0.4}$$

$$\text{Con } x_4 = e^{2.6}: \quad f(e^{2.6}) = \frac{\ln^2(e^{2.6})}{(e^{2.6})}$$

$$f(e^{2.6}) = 6.8 e^{-2.6}$$

Llevamos  $x_3$  y  $x_4$  a la recta real y analizamos los signos de  $f''(x)$  en cada uno de los intervalos formados.

<i>Signos</i> $f''(x)$	<i>Positivo</i>	<i>Negativo</i>	<i>Positivo</i>
$x$	0	$e^{0.4}$	$e^{2.6} \quad + \infty$

Intervalo de concavidad hacia arriba:  $]0, e^{0.4} [ \cup ]e^{2.6}, +\infty [$

Intervalos de concavidad hacia abajo:  $]e^{0.4}, e^{2.6} [$

Al pasar por  $x_3 = e^{0.4}$  la gráfica de la función cambia de concavidad, luego en  $x_3 = e^{0.4}$  tenemos un punto de inflexión.

$(e^{0.4}, 0.2 e^{-0.4})$  *Punto de inflexión*

Al pasar por  $x_4 = e^{2.6}$  la gráfica de la función cambia de concavidad, luego en  $x_4 = e^{2.6}$  tenemos otro punto de inflexión.

$(e^{2.6}, 6.8 e^{-2.6})$  *Punto de inflexión*

Adicionalmente analizaremos las asíntotas de la función:  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

Asíntota vertical: En  $x = 0$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{0}{0}$

Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x^2} = +\infty$$

En  $x = 0$  (eje Y) tenemos una asíntota vertical.

Asíntota horizontal (derecha):  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty}$

Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{(2x)}$$

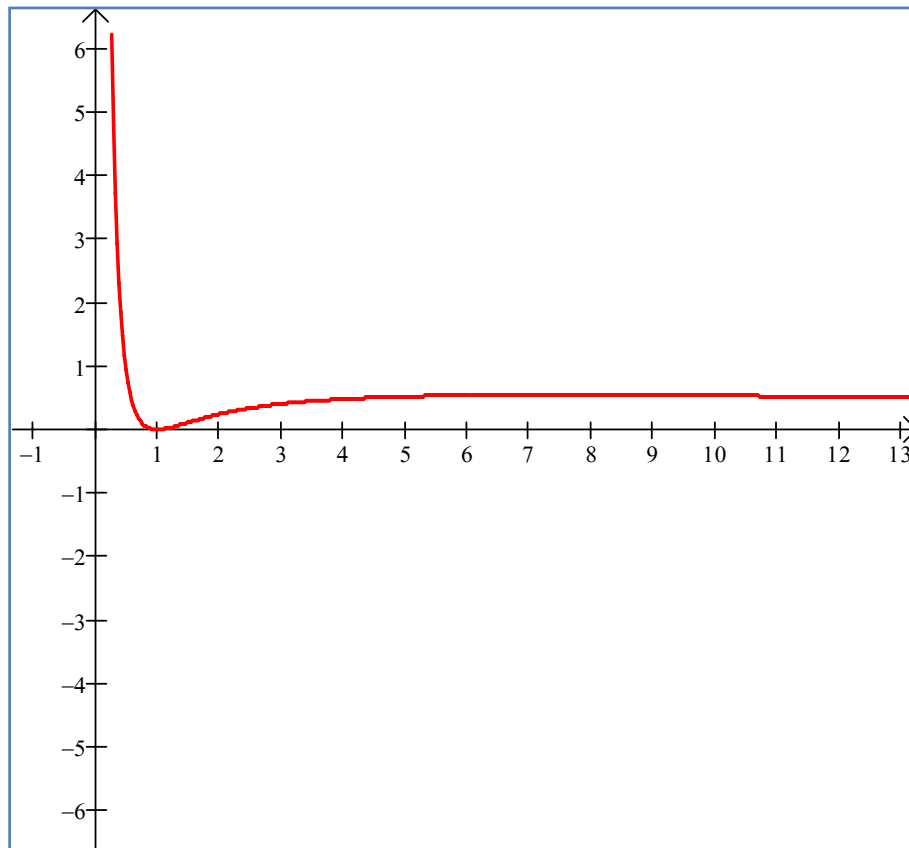
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

En  $y = 0$  (eje X) tenemos una asíntota horizontal derecha.

El siguiente cuadro resume la información obtenida:

Intervalo	Crece	Decrece	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Punto/Recta	Observación
$]0,1[$		✓	✓		$x = 0$	Asíntota vertical
$]1,e^{0.4}[$	✓		✓		$(1,0)$	Mínimo relativo
$]e^{0.4},e^2[$	✓			✓	$(e^{0.4}, 0.2e^{-0.4})$	Punto de inflexión
$]e^2,e^{2.6}[$		✓		✓	$(e^2, 4e^{-2})$	Máximo relativo
$]e^{2.6}, +\infty[$		✓	✓		$(e^{2.6}, 6.8e^{-2.6})$	Punto de inflexión
					$y = 0$	Asíntota Horizontal

A partir del cuadro anterior podemos dibujar la grafica de  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$  :



3b.  $f(x) = x^2 e^x$

Dominio: La función está definida para todos los reales

$$\text{Dom } f: x \in ] -\infty, +\infty [$$

Primera derivada:  $f'(x) = (2x)e^x + x^2 (e^x)$

$$f'(x) = e^x(2x + x^2)$$

Planteamos:

i)  $f'(x) = 0$   $e^x(2x + x^2) = 0$

$$x(x + 2)e^x = 0$$

Dado que  $e^x \neq 0$

$$x(x + 2) = 0$$

De donde:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -2$

ii)  $f'(x) = \text{NE}$   $e^x(2x + x^2) = \text{NE}$

$e^x(2x + x^2)$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Tenemos dos valores críticos:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -2$

Con  $x_1 = 0$ :  $f(0) = (0)^2 e^0$

$$f(0) = 0$$

$(0, 0)$  *Punto crítico*

Con  $x_2 = -2$ :  $f(-2) = (-2)^2 e^{-2}$

$$f(-2) = 4e^{-2}$$

$(-2, 0.5)$  *Punto crítico*

Llevamos estos valores críticos a la recta real y analizamos los signos de  $f'(x)$  en cada uno de los intervalos formados.

<i>Signos de <math>f'(x)</math></i>	<i>Positivo</i>	<i>Negativo</i>	<i>Positivo</i>
$x$	$-\infty$	$-2$	$0$
	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Intervalo de crecimiento:  $]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$

Intervalos de decrecimiento:  $]-2, 0[$

Al pasar por  $x_2 = -2$  la función pasa de creciente a decreciente, luego en  $x_2 = -2$  tenemos un máximo relativo.

$$f_{\max} = f(-2) = 0.5 \quad \text{Máximo relativo para } f$$

Al pasar por  $x_1 = 0$  la función pasa de decreciente a creciente, luego en  $x_1 = 0$  tenemos un mínimo relativo.

$$f_{\min} = f(0) = 0 \quad \text{Mínimo relativo para } f$$

Segunda derivada:  $f''(x) = (e^x)(2x + x^2) + e^x(2 + 2x)$

$$f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$$

Planteamos:

$$\text{i) } f''(x) = 0 \quad e^x(x^2 + 4x + 2) = 0$$

Dado que  $e^x \neq 0$

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

De donde:  $x_3 = -3.4, x_4 = -0.6$

$$\text{ii) } f''(x) = \text{NE} \quad e^x(x^2 + 4x + 2) = \text{NE}$$

$e^x(x^2 + 4x + 2)$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Con } x_3 = -3.4: \quad f(-3.4) = (-3.4)^2 e^{-3.4}$$

$$f(-3.4) = 0.4$$

$$\text{Con } x_4 = -0.6: \quad f(-0.6) = (-0.6)^2 e^{-0.6}$$

$$f(-0.6) = 0.2$$

Llevamos  $x_3$  y  $x_4$  a la recta real y analizamos los signos de  $f''(x)$  en cada uno de los intervalos formados.

<i>Signos</i> $f''(x)$	<i>Positivo</i>	<i>Negativo</i>	<i>Positivo</i>
$x$	$-\infty$	$-3.4$	$-0.6$
	$+\infty$		

Intervalo de concavidad hacia arriba:  $]-\infty, -3.4[ \cup ]-0.6, +\infty[$

Intervalos de concavidad hacia abajo:  $]-3.4, -0.6[$

Al pasar por  $x_3 = -3.4$  la gráfica de la función cambia de concavidad, luego en  $x_3 = -3.4$  tenemos un punto de inflexión.

$(-3.4, 0.4)$  *Punto de inflexión*

Al pasar por  $x_4 = -0.6$  la gráfica de la función cambia de concavidad, luego en  $x_4 = -0.6$  tenemos otro punto de inflexión.

$(-0.6, 0.2)$  *Punto de inflexión*

Adicionalmente analizaremos las asíntotas de la función:  $f(x) = x^2 e^x$

Asíntota vertical: La curva no presenta asíntota vertical.

Asíntota horizontal (derecha):

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

La curva no presenta asíntota horizontal.

Asíntota horizontal (izquierda):

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \infty \cdot 0$$

Debemos levantar la indeterminación. Para ello reescribimos la función  $f(x) = x^2 e^x$  como  $f(x) = \frac{x^2}{e^{-x}}$  y analizamos el límite.

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la regla de L'Hopital:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{-x}(-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{e^{-x}} = -\frac{\infty}{\infty}$$

Nuevamente, aplicamos la regla de L'Hopital:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{e^{-x}(-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

En  $y = 0$  (eje X) tenemos una asíntota horizontal izquierda.

El siguiente cuadro resume la información obtenida:

Intervalo	Crece	Decrece	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Punto/Recta	Observación
$] -\infty, -3.4 [$	✓		✓		$y = 0$	Asíntota horizontal
$] -3.4, -2 [$	✓			✓	$(-3.4, 0.4)$	Punto de inflexión
$] -2, -0.6 [$		✓		✓	$(-2, 0.5)$	Máximo relativo
$] -0.6, 0 [$		✓	✓		$(-0.6, 0.2)$	Punto de inflexión
$] 0, +\infty [$	✓		✓		$(0, 0)$	Mínimo relativo

