EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR Y DEL PRODUCTOR

Pregunta 1

Las funciones de oferta y demanda son respectivamente:

$$p = 2 + \ln(q+2) \qquad \text{y} \qquad p = 8 - \ln(q+2)$$

Calcular el excedente del consumidor y el excedente del productor, si el mercado está en equilibrio.

Resolución

Tenemos: Oferta $p_{of} = 2 + \ln(q+2)$

Demanda $p_{dem} = 8 - \ln(q+2)$

Punto de equilibrio: $p_{of} = p_{dem}$

(I) = (II): $2 + \ln(q+2) = 8 - \ln(q+2)$

$$2\ln(q+2) = 6$$

$$\ln(q+2) = 3$$

$$q + 2 = e^3$$

$$q_o = e^3 - 2$$

En la oferta: $p_o = 5$

Excedente del consumidor visto desde el eje horizontal:

$$EC = \int_0^{q_o} [p_{dem} - p_o] dq$$

$$EC = \int_0^{e^3-2} [(8 - \ln(q+2) - 5] dq$$

$$EC = \int_0^{e^3-2} [3 - \ln(q+2)] dq$$

$$EC = 3q - \int \ln(q+2) dq \Bigg|_0^{e^3-2}$$

Resolviendo la integral dada: (*ver anexo II*)

$$EC = \left[3q - \left((q+2)\ln(q+2) - (q+2)\right)\right]\Big|_0^{e^3-2}$$

EC = 13.472 u.m.

Excedente del productor visto desde el eje horizontal:

$$EP = \int_0^{q_o} \left[p_o - p_{of}\right] dq$$

$$EP = \int_0^{e^3-2} \left[5 - \left(2 + \ln(q+2)\right)\right] dq$$

$$EP = \int_0^{e^3-2} \left[3 - \ln(q+2)\right] dq$$

Nótese que hemos llegado al mismo resultado que el excedente del consumidor, por lo que:

EP = 13.472 u.m.

Pregunta 2

El ingreso marginal de una empresa es: $10(20-q)e^{-\frac{q}{20}}$, calcular el excedente del consumidor cuando $q = 20\ln 2$.

Resolución

Nos piden: Excedente del consumidor cuando $q = 20\ln 2$

Necesitamos la ecuación de la demanda.

Tenemos: ingreso marginal: $10(20-q)e^{-\frac{q}{20}}$

$$\frac{dI}{dq} = 10(20-q)e^{-\frac{q}{20}}$$

$$dI = 10(20-q)e^{-\frac{q}{20}}\,dq$$

$$\int dI = \int 10(20-q)e^{-\frac{q}{20}}\,dq$$

$$I = \int (200-10q)e^{-\frac{q}{20}}\,dq$$

Aplicamos integración por partes:

$$u = 200 - 10q \qquad du = -10dq$$

$$dv = e^{-\frac{q}{20}}dq \qquad v = \int e^{-\frac{q}{20}}dq$$

$$v = -20e^{-\frac{q}{20}}$$

En la fórmula de integración por partes:

$$I = (200 - 10q).\left(-20e^{-\frac{q}{20}}\right) - \int\left(-20e^{-\frac{q}{20}}\right).(-10dq)$$

$$I = (200q - 4000).e^{-\frac{q}{20}} - 200\int e^{-\frac{q}{20}}dq$$

$$I = (200q - 4000).e^{-\frac{q}{20}} - 200.\left(-20e^{-\frac{q}{20}}\right) + C$$

$$I = (200q - 4000).e^{-\frac{q}{20}} + 4000e^{-\frac{q}{20}} + C$$

$$I = e^{-\frac{q}{20}}[200q - 4000 + 4000] + C$$

$$I = 200q.e^{-\frac{q}{20}} + C$$

Se sabe que cuando $q = 0$ el Ingreso también es cero, por tanto:

$$0 = 200(0).e^{-\frac{(0)}{20}} + C$$

$$C = 0$$

Entonces, la función Ingreso está dada por:

$$I = 200q.e^{-\frac{q}{20}}$$

Ecuación de la Demanda:

Sabemos que: $\quad I = p.q$

$$p = \frac{I}{q}$$

Reemplazando: $\quad p = \dfrac{200q.e^{-\frac{q}{20}}}{q}$

$$p = 200e^{-\frac{q}{20}}$$

Para $q_o = 20\ln 2$: $p_o = 200e^{-\frac{20\ln 2}{20}}$

$$p_o = 200e^{-\ln 2}$$

$$p_o = 200e^{\ln 2^{-1}}$$

$$p_o = 200(2^{-1})$$

$$p_o = 100$$

EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR:

$$EC = \int_0^{q_o} [p_{dem} - p_o] dq$$

$$E.C. = \int_0^{20\ln 2} \left[200e^{-\frac{q}{20}} - 100 \right] dq$$

$$E.C. = \left[-4000e^{-\frac{q}{20}} - 100q \right] \Bigg|_0^{20\ln 2}$$

E.C. = 613.71 u.m.

Pregunta 3

Para cierto producto el Ingreso marginal está dado por: $I_{mg} = \frac{8}{(q+1)^2}$, y la función oferta por: $p = \frac{1}{2}(q+1)$, donde "q" es el número de miles de unidades. Determinar los excedentes del consumidor y del productor.

Resolución

Nos piden: Los excedentes del consumidor y del productor

Tenemos: Oferta: $p = \frac{1}{2}(q+1)$

Ingreso marginal: $I_{mg} = \frac{8}{(q+1)^2}$

$$\frac{dI}{dq} = \frac{8}{(q+1)^2}$$

$$dI = \frac{8}{(q+1)^2}dq$$

$$\int dI = 8\int (q+1)^{-2}\,dq$$

$$I = 8\left(\frac{(q+1)^{-1}}{-1}\right) + C$$

$$I = \frac{-8}{q+1} + C$$

Para $q = 0$, el ingreso $I = 0$: $$0 = \frac{-8}{0+1} + C$$

$$C = 8$$

Luego: $$I = \frac{-8}{q+1} + 8$$

Operando: $$I = \frac{8q}{q+1}$$

Como: $I = p.q$, al reemplazar tenemos: $$p.q = \frac{8q}{q+1}$$

De donde: $p = \dfrac{8}{q+1}$ (*ecuación de la demanda*)

Punto de equilibrio: $$p_{of} = p_{dem}$$

$$\frac{1}{2}(q+1) = \frac{8}{q+1}$$

$$(q+1)^2 = 16$$

De donde: $q_o = 3$

En la demanda: $p_o = 2$

Excedente del consumidor visto desde el eje horizontal:

$$EC = \int_0^{q_o}[p_{dem} - p_o]dq$$

$$EC = \int_0^{3}\left[\frac{8}{q+1} - 2\right]dq$$

$$EC = 8\ln(q+1) - 2q \Big|_0^3$$

EC = 5.090 u.m.

Excedente del productor visto desde el eje horizontal:

$$EP = \int_0^{q_o} [p_o - p_{of}]dq$$

$$EP = \int_0^3 \left[2 - \frac{1}{2}(q+1)\right]dq$$

$$EP = \int_0^3 \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}q\right]dq$$

$$EP = \frac{3}{2}q - \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^3$$

EP = 2.25 u.m.

Pregunta 4

Las funciones de demanda y oferta son:

D: $p = \ln(4a - q)$

O: $p = \ln(2q + a)$

En el punto de equilibrio, hallar el excedente del consumidor si se sabe que el excedente del productor es $\frac{3}{2}(2 - \ln 3)$

Resolución

Nos piden: Excedente del consumidor

Dato: Excedente del productor $E.P. = \frac{3}{2}(2 - \ln 3)$

Tenemos: Demanda $p = \ln(4a - q)$

Oferta: $p = \ln(2q + a)$

Punto de equilibrio: $p_{dem} = p_{of}$

$$\ln(4a - q) = \ln(2q + a)$$

$$4a - q = 2q + a$$

$$q_o = a$$

En la oferta: $$p_o = \ln(3a)$$

Como se puede ver tanto la cantidad como el precio en el equilibrio están en términos de la constante "a". Buscaremos el valor de "a" a partir del dato del excedente del productor.

Visto desde el eje horizontal:

Excedente del productor: $$EP = \int_0^{q_o} [p_o - p_{of}]dq$$

$$EP = \int_0^{a} [\ln(3a) - \ln(2q + a)]dq$$

$$EP = \int_0^{a} [\ln(3a) - \ln(2q + a)]dq$$

$$EP = \ln(3a)q - \int \ln(2q + a)dq \ \Big|_0^a$$

Resolviendo la integral dada: (*ver anexo III*)

$$EP = \ln(3a)q - \frac{1}{2}((2q + a)\ln(2q + a) - (2q + a)) \ \Big|_0^a$$

Evaluando:

$$EP = \left[\ln(3a)a - \frac{1}{2}((3a)\ln(3a) - (3a))\right] - \left[\ln(3a)(0) - \frac{1}{2}((a)\ln(a) - (a))\right]$$

$$EP = a\ln(3a) - \frac{3a}{2}\ln(3a) + \frac{3a}{2} + \frac{a}{2}\ln(a) - \frac{a}{2}$$

$$EP = a + \frac{a}{2}\ln(a) - \frac{a}{2}\ln(3a)$$

$$EP = a - \frac{a}{2}(\ln(3a) - \ln(a))$$

$$EP = a - \frac{a}{2}\ln\left(\frac{3a}{a}\right)$$

$$EP = a - \frac{a}{2}\ln 3$$

$$EP = a\left(1-\frac{\ln 3}{2}\right)$$

$$EP = \frac{a}{2}(2-\ln 3)$$

Igualando con el dato: $\frac{a}{2}(2-\ln 3) = \frac{3}{2}(2-\ln 3)$

$$a = 3$$

Con $a = 3$: $q_o = 3$, $p_o = \ln 9$

El excedente del consumidor visto desde el eje horizontal queda dado por:

$$EC = \int_0^{q_o} [p_{dem} - p_o] dq$$

$$EC = \int_0^{3} [\ln(12-q) - \ln 9] dq$$

$$EC = \int \ln(12-q)dq - (\ln 9)q \Big|_0^3$$

Resolviendo la integral dada: (*ver anexo IV*)

$$EC = -(12-q)\ln(12-q) + (12-q) - (\ln 9)q \Big|_0^3$$

$$EC = [-9\ln 9 + 9 - 3\ln 9] - [-12\ln 12 + 12 - (0)\ln 9]$$

$$EC = -12\ln 9 + 9 + 12\ln 12 - 12$$

$$EC = 12\ln 12 - 12\ln 9 - 3$$

$$EC = 0.452 \text{ u.m.}$$

ANEXO I

La integral $\int \ln x\,dx$ se puede encontrar a partir de la siguiente fórmula:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

Demostración:

$$I = \int \ln x dx$$

Aplicamos integración por partes:

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

En la fórmula de integración por partes:

$$I = (\ln x)(x) - \int (x)\left(\frac{1}{x}dx\right)$$

$$I = x \ln x - \int dx$$

$$I = x \ln x - x + C$$

ANEXO II

La integral $\int \ln(q+2)dq$ se puede encontrar con ayuda de la fórmula demostrada en el anexo anterior:

$$I = \int \ln(q+2)dq$$

Hacemos: $q + 2 = x$

$$dq = dx$$

Reemplazando, tenemos:

$$I = \int \ln x dx$$

Que de acuerdo a la fórmula demostrada en el anexo I es:

$$I = x \ln x - x + C$$

Lo que finalmente resulta:

$$I = (q+2)\ln(q+2) - (q+2) + C$$

ANEXO III

La integral $\int \ln(2q+a)dq$ se puede encontrar con ayuda de la fórmula demostrada en el anexo I:

$$I = \int \ln(2q+a)dq$$

Hacemos: $2q + a = x$

$$2dq = dx$$

$$dq = \frac{1}{2}dx$$

Reemplazando, tenemos:

$$I = \int (\ln x)\left(\frac{1}{2}dx\right)$$

$$I = \frac{1}{2}\int \ln x\,dx$$

Que de acuerdo a la fórmula demostrada en el anexo I quedaría:

$$I = \frac{1}{2}(x\ln x - x) + C$$

Lo que finalmente resulta:

$$I = \frac{1}{2}\big((2q+a)\ln(2q+a) - (2q+a)\big) + C$$

ANEXO IV

La integral $\int \ln(12-q)dq$ se puede encontrar con ayuda de la fórmula demostrada en el anexo I:

$$I = \int \ln(12-q)dq$$

Hacemos: $12 - q = x$

$$-dq = dx$$

$$dq = -dx$$

Reemplazando, tenemos:

$$I = \int (\ln x)(-dx)$$

$$I = -\int \ln x \, dx$$

Que de acuerdo a la fórmula demostrada en el anexo I quedaría:

$$I = -(x \ln x - x) + C$$

Lo que finalmente resulta:

$$I = -\big((12-q)\ln(12-q) - (12-q)\big) + C$$

$$I = -(12-q)\ln(12-q) + (12-q) + C$$