

INTEGRALES IMPROPIAS

Pregunta 1

Calcular, si existen, las siguientes integrales impropias:

$$\text{a. } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

$$\text{b. } \int_5^{+\infty} \frac{3}{x^2 - 9} dx$$

$$\text{c. } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$$

Resolución

$$\text{1a. Tenemos: } I = \int_1^{+\infty} x^{-3} dx$$

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\int_1^b x^{-3} dx \right] \quad \dots (\alpha)$$

Resolveremos la integral por separado, una vez evaluada y simplificada la reemplazamos en la expresión (α) y resolvemos el límite.

$$I_1 = \int_1^b x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_1^b = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^b$$

Evaluando:

$$I_1 = \left(-\frac{1}{2b^2} \right) - \left(-\frac{1}{2(1)^2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2}$$

Reemplazando en (α) :

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2} \right]$$

$$\text{Llevando al límite: } I = \frac{1}{2} \quad \text{Respuesta}$$

Observación para resolver el siguiente ejercicio deberá tener en cuenta las siguientes propiedades:

Propiedad 1: Propiedad distributiva con respecto a la suma (resta).

El límite de la suma (resta) de funciones es igual a la suma (resta) de los límites de las funciones.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] \pm \lim_{x \rightarrow a} [g(x)]$$

Propiedad 2: Límite de una constante.

El límite de una constante es la misma constante.

$$\lim_{x \rightarrow a} [k] = k \quad k: \text{constante}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [k f(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] \quad k: \text{constante}$$

Propiedad 3: Límite de un logaritmo.

El límite de un logaritmo de una función es igual al logaritmo del límite de dicha función.

$$\lim_{x \rightarrow a} [\ln f(x)] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] \right]$$

1b. Tenemos: $I = \int_5^{+\infty} \frac{3}{x^2 - 9} dx$

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\int_5^b \frac{3}{x^2 - 9} dx \right] \dots (\alpha)$$

Resolveremos la integral por separado, una vez evaluada y simplificada la reemplazamos en la expresión (α) y resolvemos el límite.

$$I_1 = \int_5^b \frac{3}{x^2 - 9} dx = 3 \int_5^b \frac{1}{x^2 - 9} dx = 3 \left(\frac{1}{2(3)} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| \right) \Big|_5^b$$

Evaluando:

$$I_1 = \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{b-3}{b+3} \right| \right) - \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{5-3}{5+3} \right| \right)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b-3}{b+3} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4}$$

Reemplazando en (α) :

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{b-3}{b+3} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} \right]$$

Aplicando la propiedad 1:

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{b-3}{b+3} \right) \right] - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} \right]$$

Aplicando la propiedad 2:

$$I = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{b-3}{b+3} \right) \right] - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4}$$

Aplicando la propiedad 3:

$$I = \frac{1}{2} \ln \left[\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b-3}{b+3} \right) \right] - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} \quad \dots (\beta)$$

Resolveremos el límite por separado:

$$L = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b-3}{b+3} \right) \quad \text{Forma indeterminada: } \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicamos la regla de L'Hopital:

$$L = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(b-3)'}{(b+3)'} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Reemplazamos en (β) :

$$I = \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4}$$

$$I = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} \quad \text{Respuesta}$$

1c. Tenemos: $I = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\int_0^b x^2 e^{-x} dx \right] \quad \dots (\alpha)$$

Resolveremos la integral por separado, una vez evaluada y simplificada la reemplazamos en la expresión (α) y resolvemos el límite.

$$I_1 = \int_0^b x^2 e^{-x} dx$$

Aplicamos integración por partes:

$$u = x^2 \quad \text{diferenciamos:} \quad du = 2x dx$$

$$dv = e^{-x} dx \quad \text{integramos:} \quad v = -e^{-x}$$

En la fórmula de integración por partes:

$$I_1 = (x^2)(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})(2x dx) \Big|_0^b$$

$$I_1 = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx \Big|_0^b$$

Aplicando, nuevamente, integración por partes para resolver la última integral obtenemos:

$$I_1 = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) \Big|_0^b$$

$$I_1 = -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) \Big|_0^b$$

Evaluando:

$$I_1 = [-e^{-b} (b^2 + 2b + 2)] - [-e^{-0} ((0)^2 + 2(0) + 2)]$$

$$I_1 = 2 - \frac{b^2 + 2b + 2}{e^b}$$

Reemplazando en (α):

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[2 - \frac{b^2 + 2b + 2}{e^b} \right]$$

Aplicando la propiedad distributiva y de la constante, tenemos:

$$I = 2 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b^2 + 2b + 2}{e^b} \right]$$

Encontramos un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, por lo que aplicaremos la regla de L'Hopital:

$$I = 2 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{2b + 2}{e^b} \right]$$

Nuevamente tenemos la F.I. $\frac{\infty}{\infty}$, por lo que:

$$I = 2 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{e^b} \right]$$

Llevando al límite: $I = 2$ *Respuesta*

Pregunta 2

Calcular el valor de "a" ($a > 0$) tal que la integral impropia: $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = 0.25$

Resolución

Tenemos: $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = 0.25$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-ax} dx = 0.25 \quad \dots (\alpha)$$

Resolvemos la integral por separado:

$$I = \int_0^b e^{-ax} dx$$

$$I = \left. \frac{1}{-a} e^{-ax} \right|_0^b$$

Evaluando: $I = \left(\frac{1}{-a} e^{-a(b)} \right) - \left(\frac{1}{-a} e^{-a(0)} \right)$

$$I = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} e^{-ab}$$

Reemplazando en (α):

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a} e^{-ab} \right] = 0.25$$

Llevando al límite:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a}(0) = 0.25$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{4}$$

$$a = 4$$

Pregunta 3

Si se sabe que: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^k} = \frac{1}{8}$, hallar el valor de "k".

Resolución

Tenemos: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^k} = \frac{1}{8}$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+1)^k} = \frac{1}{8} \quad \dots (\alpha)$$

Resolvemos la integral por separado:

$$I = \int_0^b (x+1)^{-k} dx$$

$$I = \frac{(x+1)^{-k+1}}{-k+1} \Big|_0^b$$

$$I = \frac{(x+1)^{-k+1}}{(1-k)} \Big|_0^b$$

Evaluando: $I = \left(\frac{(b+1)^{-k+1}}{(1-k)} \right) - \left(\frac{(1)^{-k+1}}{(1-k)} \right)$

$$I = \frac{(b+1)^{-k+1}}{(1-k)} - \frac{1}{(1-k)}$$

Reemplazando en (α) :

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{(b+1)^{-k+1}}{(1-k)} - \frac{1}{(1-k)} \right] = \frac{1}{8}$$

Llevando al límite:

$$\frac{0}{(1-k)} - \frac{1}{(1-k)} = \frac{1}{8}$$

$$-\frac{1}{(1-k)} = \frac{1}{8}$$

$$-(1-k) = 8$$

$$k = 9$$

Observación:

Analizaremos la igualdad: $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{(b+1)^{-k+1}}{(1-k)} - \frac{1}{(1-k)} \right] = \frac{1}{8} \quad \dots (I)$

Aplicando la propiedad distributiva, el límite $L = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{(b+1)^{-k+1}}{(1-k)} - \frac{1}{(1-k)} \right]$ se puede reescribir como:

$$L = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{(b+1)^{-k+1}}{(1-k)} \right] - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(1-k)} \right]$$

Y dado que $\frac{1}{(1-k)}$ es constante, podemos reescribir:

$$L = \frac{1}{(1-k)} \lim_{b \rightarrow +\infty} [(b+1)^{-k+1}] - \frac{1}{(1-k)} \quad \dots (II)$$

Centremos nuestra atención en el límite incluido en la expresión (II):

$$L_1 = \lim_{b \rightarrow +\infty} [(b+1)^{-k+1}]$$

Dado que no conocemos el valor de “k”, tenemos tres posibilidades:

1. $-k+1 > 0$
2. $-k+1 = 0$
3. $-k+1 < 0$

1er caso: Si $-k+1 > 0$, el exponente de $(b+1)^{-k+1}$ será positivo. Luego el límite: $L_1 = \lim_{b \rightarrow +\infty} [(b+1)^{-k+1}]$ resultaría $(\infty+1)^{-k+1}$, es decir “infinito elevado a un número positivo” lo que tiende a $+\infty$.

En este caso, si $-k+1 > 0$, tendríamos que $\lim_{b \rightarrow +\infty} [(b+1)^{-k+1}] = +\infty$ lo que llevado a la expresión (II) resultaría:

$$L = \frac{1}{(1-k)} [+\infty] - \frac{1}{(1-k)} = +\infty$$

El resultado sería $+\infty$ y no $\frac{1}{8}$ como se indica en (I). Por lo que concluimos que no es posible este caso.

2do caso: Si $-k + 1 = 0$, el exponente de $(b + 1)^{-k+1}$ será cero. Luego el límite: $L_1 = \lim_{b \rightarrow +\infty} [(b + 1)^{-k+1}]$ resultaría $(\infty + 1)^0$, es decir “infinito a la cero” lo que corresponde a una forma indeterminada no estudiada en el curso.

Concluimos que no es posible este caso.

Sin embargo, si $-k + 1 = 0$ tenemos que $k = 1$, por lo que la condición original estaría dada por:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{8}$$

Lo que después de resolver la integral y evaluarla nos llevaría a la siguiente igualdad:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln(b + 1) - \ln 1] = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln(b + 1)] = \frac{1}{8}$$

Que resultaría una contradicción ya que el límite $\lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln(b + 1)]$ tiende a $+\infty$, que es diferente a $\frac{1}{8}$.

Concluimos que no es posible este caso.

3er caso: Si $-k + 1 < 0$, el exponente de $(b + 1)^{-k+1}$ será negativo. Luego el límite: $L_1 = \lim_{b \rightarrow +\infty} [(b + 1)^{-k+1}]$ resultaría $(\infty + 1)^{-k+1}$, es decir “infinito elevado a un número negativo” lo que tiende a 0.

En este caso, si $-k + 1 < 0$, tendríamos que $\lim_{b \rightarrow +\infty} [(b + 1)^{-k+1}] = 0$ lo que llevado a la expresión (II) resultaría:

$$L = \frac{1}{(1-k)} [0] - \frac{1}{(1-k)} = -\frac{1}{(1-k)}$$

El resultado sería $-\frac{1}{(1-k)}$ que debería ser igual a $\frac{1}{8}$ como se indica en (I). Es de esta forma como se llegó a la respuesta del ejercicio.