

### Pregunta 1

Dada la función:  $f(x, y) = x^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 e^{\frac{x}{y}}$

- Verifique que es una función homogénea y halle su grado de homogeneidad.
- Verifique si esta función cumple el primer teorema de Euler.
- Calcule “m” si se cumple que  $x^2 f_{xx} - xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 2f(x, y) + 3x(x - y)e^{\frac{x}{y}} + mx^2$

### Resolución

---

Parte a.

Por teoría, si una función  $z = f(x, y)$  es tal que para una constante  $k$  se cumple que  $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$ , decimos que la función es homogénea de grado “n”.

Tenemos:  $f(x, y) = x^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 e^{\frac{x}{y}}$

Planteamos:  $f(kx, ky) = (kx)^2 \ln\left(\frac{ky}{kx}\right) + (ky)^2 e^{\frac{kx}{ky}} \quad (k : \text{constante})$

$$f(kx, ky) = k^2 x^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) + k^2 y^2 e^{\frac{x}{y}}$$

$$f(kx, ky) = k^2 \left[ x^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 e^{\frac{x}{y}} \right]$$

$$f(kx, ky) = k^2 f(x, y)$$

Luego, la función  $f(x, y)$  es homogénea de grado 2.

Parte b.

Debemos verificar si la función  $f(x, y)$  cumple el primer teorema de Euler, es decir se debe verificar:  $x f_x + y f_y = n f(x, y)$ , donde “n” es el grado de la función homogénea.

En nuestro caso  $n = 2$ , por lo que debemos verificar:

$$x f_x + y f_y = 2 f(x, y) \quad \dots (\alpha)$$

Tenemos:  $f(x, y) = x^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 e^{\frac{x}{y}}$

$$f(x, y) = x^2 (\ln y - \ln x) + y^2 e^{xy^{-1}}$$

Derivando  $f(x, y)$  con respecto a “ $x$ ”:

$$f_x = 2x (\ln y - \ln x) + x^2 \left(-\frac{1}{x}\right) + y^2 e^{xy^{-1}} \cdot (y^{-1})$$

$$f_x = 2x \ln y - 2x \ln x - x + y e^{xy^{-1}} \quad \dots (\beta)$$

Derivando  $f(x, y)$  con respecto a “ $y$ ”:

$$f_y = x^2 \left(\frac{1}{y}\right) + 2y e^{xy^{-1}} + y^2 e^{xy^{-1}} \cdot (-xy^{-2})$$

$$f_y = \frac{x^2}{y} + 2y e^{xy^{-1}} - x e^{xy^{-1}} \quad \dots (\theta)$$

Reemplazando  $(\beta)$  y  $(\theta)$  en  $(\alpha)$ :

$$x \left(2x \ln y - 2x \ln x - x + y e^{xy^{-1}}\right) + y \left(\frac{x^2}{y} + 2y e^{xy^{-1}} - x e^{xy^{-1}}\right) = 2f(x, y)$$

$$2x^2 \ln y - 2x^2 \ln x - x^2 + xy e^{xy^{-1}} + x^2 + 2y^2 e^{xy^{-1}} - xy e^{xy^{-1}} = 2f(x, y)$$

Reduciendo términos semejantes:

$$2x^2 \ln y - 2x^2 \ln x + 2y^2 e^{xy^{-1}} = 2f(x, y)$$

$$2x^2 (\ln y - \ln x) + 2y^2 e^{xy^{-1}} = 2f(x, y)$$

$$2 \left[ x^2 (\ln y - \ln x) + y^2 e^{xy^{-1}} \right] = 2f(x, y)$$

$$2f(x, y) = 2f(x, y) \quad \text{Lo que se quería verificar.}$$

Parte c.

Nos piden “ $m$ ”

$$\text{Dato: } x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} - xy f_{xy} = 2f(x, y) + 3x(x - y)e^{\frac{x}{y}} + mx^2 \quad \dots (I)$$

Dado que  $f(x, y)$  es una función homogénea de grado 2, podemos aplicar el segundo teorema de Euler, es decir:

$$x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = n(n - 1)f(x, y)$$

$$\text{Para } n = 2: \quad x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 2(2 - 1)f(x, y)$$

$$x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 2f(x, y)$$

De donde:  $x^2 f_{xx} + y^2 f_{yy} = 2f(x, y) - 2xy f_{xy} \dots$  (II)

Reemplazamos (II) en (I):

$$2f(x, y) - 2xy f_{xy} - xy f_{xy} = 2f(x, y) + 3x(x - y)e^{\frac{x}{y}} + mx^2$$

$$- 3xy f_{xy} = 3x(x - y)e^{\frac{x}{y}} + mx^2 \dots$$
 (III)

De la expresión (III) se nota que para encontrar el valor de “m” primero necesitamos encontrar  $f_{xy}$ .

De la parte b. tomamos lo obtenido en (β):

$$f_x = 2x \ln y - 2x \ln x - x + y e^{xy^{-1}}$$

Derivamos esta expresión con respecto a “y”:

$$f_{xy} = 2x \left( \frac{1}{y} \right) + (1) e^{xy^{-1}} + y e^{xy^{-1}} (-xy^{-2})$$

$$f_{xy} = \frac{2x}{y} + e^{xy^{-1}} - xy^{-1} e^{xy^{-1}} \dots$$
 (IV)

Reemplazamos (IV) en (III):

$$- 3xy \left( \frac{2x}{y} + e^{xy^{-1}} - xy^{-1} e^{xy^{-1}} \right) = 3x(x - y)e^{\frac{x}{y}} + mx^2$$

$$- 6x^2 - 3xye^{xy^{-1}} + 3x^2 e^{xy^{-1}} = (3x^2 - 3xy)e^{\frac{x}{y}} + mx^2$$

$$- 6x^2 - 3xye^{xy^{-1}} + 3x^2 e^{xy^{-1}} = 3x^2 e^{\frac{x}{y}} - 3xy e^{\frac{x}{y}} + mx^2$$

$$- 6x^2 = mx^2 \quad \text{De donde } m = -6$$

## Pregunta 2

Dada la función  $z = x^2 f(x, y) + y^3 g(x, y)$ . Donde  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  son funciones homogéneas de grados " $n - 2$ " y " $-2 - n$ ", respectivamente. Hallar en términos de  $n$ , la constante  $k$ , tal que:  $x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = k z$ .

## Resolución

---

Nos piden:  $k$

Para ello nos debemos apoyar del dato:

$$x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = k z \quad \dots (I)$$

Para despejar  $k$  debemos reducir el primer miembro de esta igualdad.

Nótese que este primer miembro tiene la forma del segundo teorema de Euler. Sin embargo no podemos afirmar que se trate del teorema de Euler, ya que no sabemos si la función involucrada, en este caso la función  $z$  de variables " $x$ " e " $y$ " es homogénea. En tanto no verifiquemos que  $z$  es una función homogénea, no podemos afirmar que el primer miembro de la igualdad (I) corresponde al segundo teorema de Euler.

Tenemos  $z = x^2 f(x, y) + y^3 g(x, y) \quad \dots (II)$

Consideremos al producto  $x^2 f(x, y)$  como una función  $U$  de las variables " $x$ " e " $y$ ". Es decir:  $U = x^2 f(x, y)$ . Dado que por dato  $f(x, y)$  es homogénea de grado " $n - 2$ ", al multiplicarse por  $x^2$  - que es homogéneo de grado 2 -, se desprende que la función  $U$  también será homogénea y su grado será la suma de los grados " $n - 2 + 2$ ". Luego decimos que  $U = x^2 f(x, y)$  es una función homogénea de grado " $n$ ".

De igual manera consideremos al producto  $y^3 g(x, y)$  como una función  $V$  de las variables " $x$ " e " $y$ ". Es decir:  $V = y^3 g(x, y)$ . Del dato  $g(x, y)$  es homogénea de grado " $-2 - n$ ", al multiplicarse por  $y^3$  - que es homogéneo de grado 3 -, se desprende que la función  $V$  también será homogénea y su grado será la suma de los grados " $-2 - n + 3$ ". Luego decimos que  $V = y^3 g(x, y)$  es una función homogénea de grado " $1 - n$ ".

Reemplazando  $U = x^2 f(x, y)$  y  $V = y^3 g(x, y)$  en la expresión (II), tenemos:

$$z = U + V \quad \dots (III)$$

La función  $z$  es la suma de dos funciones homogéneas  $U$  y  $V$ , pero estas funciones no tienen el mismo grado,  $U$  es de grado " $n$ " y  $V$  de grado " $1 - n$ ". Tenga en cuenta que para que una función suma sea homogénea, todos los sumandos deben ser homogéneos y del mismo grado.

Luego, la función  $z$  no es homogénea y por tanto el primer miembro de la igualdad (I) no corresponde con el segundo teorema de Euler.

Resolveremos el problema de forma convencional. Es decir buscando por separado las derivadas  $z_{xx}$ ,  $z_{xy}$  y  $z_{yy}$  para luego reemplazarlas en (I). Para ello nos apoyaremos de la expresión (III).

Derivando ambos miembros de la igualdad (III) con respecto a “x”:

$$z_x = U_x + V_x \quad \dots \text{(IV)}$$

De (IV) derivamos con respecto a “x”:

$$z_{xx} = U_{xx} + V_{xx} \quad \dots \text{(}\alpha\text{)}$$

De (IV) derivamos con respecto a “y”:

$$z_{xy} = U_{xy} + V_{xy} \quad \dots \text{(}\beta\text{)}$$

Derivando ambos miembros de la igualdad (III) con respecto a “y”:

$$z_y = U_y + V_y \quad \dots \text{(V)}$$

De (V) derivamos con respecto a “y”:

$$z_{yy} = U_{yy} + V_{yy} \quad \dots \text{(}\theta\text{)}$$

Reemplazamos  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  y  $(\theta)$  en (I):

$$x^2(U_{xx} + V_{xx}) + 2xy(U_{xy} + V_{xy}) + y^2(U_{yy} + V_{yy}) = k z$$

Operamos

$$x^2U_{xx} + x^2V_{xx} + 2xyU_{xy} + 2xyV_{xy} + y^2U_{yy} + y^2V_{yy} = k z$$

Ordenamos:

$$x^2U_{xx} + 2xyU_{xy} + y^2U_{yy} + x^2V_{xx} + 2xyV_{xy} + y^2V_{yy} = k z \quad \dots \text{(VI)}$$

Nótese que los tres primeros sumandos se corresponden con el segundo teorema de Euler y los últimos tres sumandos también. Dado que se había demostrado que  $U$  y  $V$  eran funciones homogéneas, podemos afirmar que se trata del segundo teorema de Euler.

La aplicación del 2do. Teorema de Euler para la función  $U$  en las variables “x” e “y”, homogénea de grado “n” será:

$$x^2U_{xx} + 2xyU_{xy} + y^2U_{yy} = n(n-1)U$$

$$x^2U_{xx} + 2xyU_{xy} + y^2U_{yy} = (n^2 - n)U \quad \dots \text{(VII)}$$

La aplicación del 2do. Teorema de Euler para la función  $V$  en las variables “ $x$ ” e “ $y$ ”, homogénea de grado “ $1 - n$ ” será:

$$x^2V_{xx} + 2xyV_{xy} + y^2V_{yy} = (1 - n)(1 - n - 1)V$$

$$x^2V_{xx} + 2xyV_{xy} + y^2V_{yy} = (1 - n)(-n)V$$

$$x^2V_{xx} + 2xyV_{xy} + y^2V_{yy} = (n^2 - n)V \quad \dots \text{(VIII)}$$

Reemplazando (VII), (VIII) y (III) en (VI), tenemos:

$$(n^2 - n)U + (n^2 - n)V = k(U + V)$$

$$(n^2 - n)(U + V) = k(U + V) \quad \text{De donde:} \quad k = n^2 - n$$