## Apuntes acerca de la Regla de L´Hôpital

Se conoce con este nombre a la regla que permite resolver límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Este tipo de límites se han desarrollado anteriormente y su resolución consistía, en buscar el factor generador del cero - caso $\frac{0}{0}$ - o en analizar los grados - caso $\frac{\infty}{\infty}$ - con el fin de levantar la indeterminación.

En estos métodos de resolución, la búsqueda del factor cero y el análisis del grado, suponen que solo están involucradas funciones algebraicas. En el caso que se presenten otros tipos de funciones como logarítmicas o exponenciales, el método anterior resulta limitado.

Ejemplo 1: El límite $L_1 = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{3x-3}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Para levantar la indeterminación buscamos en el numerador y denominador el factor generador del cero, en este caso "$x-1$".

Tenemos: $L_1 = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{3x-3}$

Factorizando el numerador y denominador:

$$L_1 = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)}$$

Simplificando el factor "$x-1$":

$$L_1 = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{3}$$

Evaluando: $L_1 = \frac{2}{3}$ *Respuesta*

Ejemplo 2: El límite $L_2 = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\ln x}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Si bien es posible factorizar el numerador y encontrar el factor generador del cero "$x-1$", en el denominador no hay manera de lograrlo.

Para resolver situaciones como las presentadas en el segundo ejemplo debemos aplicar la regla de L´Hôpital, la cual hace uso de las derivadas para levantar la indeterminación.

A continuación presentamos la formulación matemática de esta regla para el caso $\frac{0}{0}$.

## Regla de L´Hôpital

Si $f(a)=0$ y $g(a)=0$, además $f$ y $g$ son diferenciables en un intervalo abierto que contiene a $x=a$; entonces,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Tenga en cuenta que la regla de L´Hôpital solo se puede aplicar para límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. El procedimiento consiste en derivar el numerador y denominador de la expresión racional dada. Tenga cuidado, no caiga en el error de derivar aplicando la regla del cociente. No es así. Se debe derivar el numerador y denominador por separado para luego analizar el límite de la fracción de las derivadas resultantes.

A partir de la formulación de la regla de L´Hôpital podemos resolver el ejemplo 2 propuesto anteriormente.

Tenemos: $L_2=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}$ F.I. $\frac{0}{0}$

Aplicaremos la regla de L´Hôpital, la derivada del numerador $x^3-1$ resulta $3x^2$, la derivada del denominador $\ln x$ resulta $\frac{1}{x}$.

Luego: $$L_2=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}$$

$$L_2=\lim_{x\to 1}3x^3$$

Evaluando: $L_2=3$ *Respuesta*

**Pregunta 1**

Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2 e^x}{\ln^2 x + 2(2x-2)^2}$

**Resolución**

---

Tenemos: $L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2 e^x}{\ln^2 x + 2(2x-2)^2}$ evaluando: $L = \dfrac{0}{0}$

Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{[2(x-1)(1)]e^x + (x-1)^2[e^x(1)]}{\left[2\ln x\left(\frac{1}{x}\right)\right] + 4(2x-2)(2)}$$

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x}{2\frac{1}{x}\ln x + 16x - 16}$$

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{[2x-2+x^2-2x+1]e^x}{2\frac{1}{x}\ln x + 16x - 16}$$

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{[x^2-1]e^x}{2x^{-1}\ln x + 16x - 16}$$ evaluando: $L = \dfrac{0}{0}$

Nuevamente aplicamos la regla de L´Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{(2x)e^x + (x^2-1)(e^x(1))}{2\left[(-x^{-2})\ln x + x^{-1}\frac{1}{x}\right] + 16}$$

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{(2x+x^2-1)e^x}{2\left[-x^{-2}\ln x + x^{-2}\right] + 16}$$

Evaluando: $L = \dfrac{2e}{18}$

$L = \dfrac{e}{9}$ *Respuesta*

**Pregunta 2**

Calcular: $\lim_{x\to 1}\dfrac{(x^2+1)^x-2x}{x\ln x+x-1}$

**Resolución**

---

Tenemos: $L=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x^2+1)^x-2x}{x\ln x+x-1}$ evaluando: $L=\dfrac{0}{0}$

Dado que el límite tiene la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ aplicaremos la regla de L´Hôpital. Para ello debemos derivar, con respecto a "x", el numerador y denominador de la expresión dada.

Derivar el denominador no genera mayor dificultad, sin embargo en el numerador tenemos la función $(x^2+1)^x$ que no se puede derivar directamente[1].

Llamaremos $f(x)=(x^2+1)^x$ a dicha función.

Luego, el límite queda: $L=\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{x\ln x+x-1}$

Aplicando la regla de L´Hôpital:

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-2}{(1)\ln x+x\left(\frac{1}{x}\right)+1}$$

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-2}{\ln x+2} \quad \ldots (\alpha)$$

Buscaremos $f'(x)$ como si se tratase de un problema aparte y luego lo reemplazaremos en $(\alpha)$ para evaluar el límite.

Tenemos: $f(x)=(x^2+1)^x$

Tomamos logaritmos:

$$\ln f(x)=\ln(x^2+1)^x$$

$$\ln f(x)=x\ln(x^2+1)$$

Derivamos aplicando la regla del producto:

---

[1] Si bien existe una fórmula para derivar funciones de este tipo, donde tanto la base como el exponente contienen la variable, esta no será usada por escapar a los objetivos del tema.

$$\frac{1}{f(x)}f'(x)=(1)\ln(x^2+1)+x\left(\frac{1}{x^2+1}(2x)\right)$$

De donde:

$$f'(x)=\left[\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right].f(x)$$

$$f'(x)=\left[\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right].(x^2+1)^x \qquad \ldots\ (\beta)$$

Reemplazando ($\beta$) en ($\alpha$):

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{\left[\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right].(x^2+1)^x-2}{\ln x+2}$$

Evaluando: $L=\dfrac{(\ln 2+1).(2)-2}{\ln 1+2}$

$$L=\frac{2\ln 2+2-2}{0+2}$$

$L=\ln 2$ *Respuesta*

**Pregunta 3**

Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x+x^2-3x+1}{\ln(2x-1)+e^{x-1}-x^3}$

**Resolución**

Tenemos: $\displaystyle L=\lim_{x\to 1}\frac{x^x+x^2-3x+1}{\ln(2x-1)+e^{x-1}-x^3}$ evaluando: $L=\dfrac{0}{0}$

Dado que el límite tiene la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ aplicaremos la regla de L´Hôpital. Es decir debemos derivar, con respecto a "x", el numerador y denominador de la expresión dada.

Al igual que el ejercicio anterior, tenemos una pequeña dificultad con la función $x^x$, cuya derivada no se puede hacer directamente.

Llamaremos $g(x)=x^x$ a dicha función.

Luego, el límite queda: $L = \lim_{x\to 1} \dfrac{g(x) + x^2 - 3x + 1}{\ln(2x-1) + e^{x-1} - x^3}$

Aplicando la regla de L´Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{g'(x) + 2x - 3}{\frac{1}{2x-1}(2) + e^{x-1}(1) - 3x^2}$$

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{g'(x) + 2x - 3}{\frac{2}{2x-1} + e^{x-1} - 3x^2} \quad \ldots (\alpha)$$

Buscaremos $g'(x)$:

Tenemos: $g(x) = x^x$

Tomamos logaritmos:

$$\ln g(x) = x \ln x$$

Derivamos aplicando la regla del producto:

$$\frac{1}{g(x)} g'(x) = (1)\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)$$

De donde:

$$g'(x) = [\ln x + 1].g(x) \quad \ldots (\theta)$$

$$g'(x) = [\ln x + 1].x^x \quad \ldots (\beta)$$

Reemplazando (β) en (α):

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{[\ln x + 1]x^x + 2x - 3}{2(2x-1)^{-1} + e^{x-1} - 3x^2}$$

Evaluando: $L = \dfrac{(\ln 1 + 1).(1) + 2 - 3}{2(1) + e^0 - 3}$

$$L = \frac{0}{0}$$

Debemos aplicar – nuevamente - la regla de L´Hôpital:

Derivamos a partir de (α):

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{g''(x) + 2}{-2(2x-1)^{-2}(2) + e^{x-1}(1) - 6x} \quad \ldots (\rho)$$

Necesitamos $g''(x)$

Recomendamos derivar a partir de $(\theta)$:

$$g''(x) = \left(\frac{1}{x}\right).g(x) + [\ln x + 1].g'(x)$$

Reemplazando:

$$g''(x) = (x^{-1}).x^{x} + [\ln x + 1].[\ln x + 1].x^{x}$$

$$g''(x) = x^{x-1} + [\ln x + 1]^{2} \,.\, x^{x}$$

En $(\rho)$: $$L = \lim_{x\to 1} \frac{x^{x-1} + [\ln x + 1]^{2}\, x^{x} + 2}{-4(2x-1)^{-2} + e^{x-1} - 6x}$$

Evaluando: $$L = \frac{(1) + [\ln 1 + 1]^{2}\,(1) + 2}{-4(1) + e^{0} - 6}$$

$$L = -\frac{4}{9}$$ *Respuesta*

**Pregunta 4**

Si $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\,f(x)}{\ln x\, g(x)} = \frac{3}{2}$ y $f(1) = -6$ , halle $g(1)$

**Resolución**

---

Nos piden: $g(1)$

Dato: $f(1) = -6$

Tenemos: $$L = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\,f(x)}{\ln x\, g(x)} = \frac{3}{2} \qquad \ldots (\alpha)$$

Analizamos el límite: $L = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\,f(x)}{\ln x\, g(x)}$ evaluando: $L = \frac{0}{0}$

Aplicamos la regla de L´Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{(1)\,f(x) + (x-1)\,f'(x)}{\left(\frac{1}{x}\right) g(x) + \ln x\, g'(x)}$$

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) + (x-1)\,f'(x)}{x^{-1}\, g(x) + \ln x\, g'(x)}$$

Evaluando: $\quad L = \dfrac{f(1) + (0)\,f\,'(1)}{(1)\,g(1) + \ln 1\, g\,'(1)}$

$L = \dfrac{f(1) + 0}{g(1) + 0}$ Del dato: $f(1) = -6$

$L = \dfrac{-6}{g(1)}$

En (α): $\dfrac{-6}{g(1)} = \dfrac{3}{2}$ de donde: $g(1) = -4$ *Respuesta*