Pregunta 4

Dada la función implícita: $f\left(\dfrac{z^2-x^2}{xz},\dfrac{z^2-y^2}{yz}\right)=0$. Si $z=g(x,y)$ es una función homogénea. Hallar el valor de "k" si se sabe que

$$x^2 z_{xx}+2xy\,z_{xy}+y^2 z_{yy}=k\,z\,.$$

Resolución

Nos piden: "k"

Para encontrar este valor debemos trabajar en el dato que contiene "k", es decir:

$$x^2 z_{xx}+2xy\,z_{xy}+y^2 z_{yy}=n(n-1)z \qquad \ldots \text{(I)}$$

En este dato simplificando el primer miembro será posible despejar y calcular el valor de "k". Ahora, nótese que el primer miembro de esta igualdad tiene la forma del segundo teorema de Euler. Y dado que en el enunciado de la pregunta se nos dice que $z=g(x,y)$ es una función homogénea, afirmamos que se trata del segundo Teorema de Euler.

Luego, si "n" es el grado de la función homogénea $z=g(x,y)$ tendremos de (I):

$$n(n-1)z=k\,z$$

$$k=n(n-1) \qquad \ldots \text{(II)}$$

De la expresión (II) se desprende que para encontrar el valor de "k" debemos conocer primero el grado de homogeneidad de z, es decir el valor de "n".

Ahora: ¿De donde podremos calcular "n"?

Dado que $z=g(x,y)$ es homogénea, podemos plantear el primer teorema de Euler. Así tenemos:

$$x\,z_x+y\,z_y=n\,z \qquad \ldots \text{(III)}$$

De la expresión (III) se desprende que para encontrar el valor de "n", primero debemos simplificar el primer miembro de dicha igualdad. Para ello, debemos calcular las primeras derivadas parciales de "z" con respecto a "x" y con respecto a "y". Buscaremos estas derivadas.

Tenemos: $f\left(\dfrac{z^2-x^2}{xz},\dfrac{z^2-y^2}{yz}\right)=0$

La cual define a "z" implícitamente como función de "x" e "y".

Luego, para calcular las derivadas parciales de "z" tenemos que hacer uso de las fórmulas de derivación implícita.

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z} \qquad \ldots \text{(IV)}$$

$$z_y = -\frac{f_y}{f_z} \qquad \ldots \text{(V)}$$

Ahora, para calcular z_x y z_y necesitamos encontrar primero las derivadas parciales de la función "f", es decir necesitamos: f_x, f_y y f_z. Nótese que la función "f" al estar igualada a cero hace las veces de la llamada "función cero" que es la que se debe usar en las fórmulas de derivación implícita.

Buscaremos entonces las derivadas parciales de "f".

$$f\left(\frac{z^2 - x^2}{xz}, \frac{z^2 - y^2}{yz}\right) = 0$$

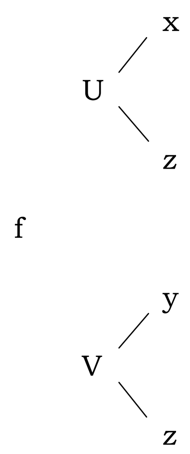
Esta función es una función compuesta. Por tanto, a manera de un cambio de variable, crearemos dos nuevas funciones:

Hacemos: $$U = \frac{z^2 - x^2}{xz} = \frac{z^2}{xz} - \frac{x^2}{xz} = x^{-1}z - xz^{-1}$$

$$V = \frac{z^2 - y^2}{yz} = \frac{z^2}{yz} - \frac{y^2}{yz} = y^{-1}z - yz^{-1}$$

Entonces: $f(U, V) = 0$

Esto nos permite construir el siguiente diagrama de árbol:



Apoyándonos de este diagrama planteamos:

$$f_x = f_U U_x \qquad f_x = f_U\left[-x^{-2}z - z^{-1}\right]$$

$$f_x = f_U\left[-\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z}\right]$$

$$f_x = -\frac{\left[z^2 + x^2\right]f_U}{x^2 z}$$

$$f_y = f_V V_y \qquad f_y = f_V\left[-y^{-2}z - z^{-1}\right]$$

$$f_y = f_U\left[-\frac{z}{y^2} - \frac{1}{z}\right]$$

$$f_y = -\frac{\left[z^2 + y^2\right]f_V}{y^2 z}$$

$$f_z = f_U U_z + f_V V_z \qquad f_z = f_U\left[x^{-1} + xz^{-2}\right] + f_V\left[y^{-1} + yz^{-2}\right]$$

$$f_z = f_U\left[\frac{1}{x} + \frac{x}{z^2}\right] + f_V\left[\frac{1}{y} + \frac{y}{z^2}\right]$$

$$f_z = f_U\left[\frac{z^2 + x^2}{xz^2}\right] + f_V\left[\frac{z^2 + y^2}{yz^2}\right]$$

$$f_z = \frac{y\left[z^2 + x^2\right]f_U + x\left[z^2 + y^2\right]f_V}{xyz^2}$$

Reemplazamos estas expresiones en las fórmulas (IV) y (V):

En (IV): $$z_x = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{-\dfrac{(z^2 + x^2)f_U}{x^2 z}}{\dfrac{y(z^2 + x^2)f_U + x(z^2 + y^2)f_V}{xyz^2}}$$

$$z_x = \frac{yz(z^2 + x^2)f_U}{x\left[y(z^2 + x^2)f_U + x(z^2 + y^2)f_V\right]} \qquad \ldots \text{(VI)}$$

En (V): $$z_y = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{-\dfrac{(z^2 + y^2)f_V}{y^2 z}}{\dfrac{y(z^2 + x^2)f_U + x(z^2 + y^2)f_V}{xyz^2}}$$

$$z_y = \frac{xz(z^2 + y^2)f_V}{y\left[y(z^2 + x^2)f_U + x(z^2 + y^2)f_V\right]} \qquad \ldots \text{(VII)}$$

Reemplazamos (VI) y (VII) en (III):

$$x\left(\frac{yz(z^2+x^2)f_U}{x\left[y(z^2+x^2)f_U+x(z^2+y^2)f_V\right]}\right)+y\left(\frac{xz(z^2+y^2)f_V}{y\left[y(z^2+x^2)f_U+x(z^2+y^2)f_V\right]}\right)=nz$$

$$\frac{yz(z^2+x^2)f_U}{y(z^2+x^2)f_U+x(z^2+y^2)f_V}+\frac{xz(z^2+y^2)f_V}{y(z^2+x^2)f_U+x(z^2+y^2)f_V}=nz$$

$$\frac{yz(z^2+x^2)f_U+xz(z^2+y^2)f_V}{y(z^2+x^2)f_U+x(z^2+y^2)f_V}=nz$$

$$\frac{z\left[y(z^2+x^2)f_U+x(z^2+y^2)f_V\right]}{y(z^2+x^2)f_U+x(z^2+y^2)f_V}=nz$$

$$z=nz$$

$$n=1$$

En (II): $k=1(1-1)$

$k=0$ *Respuesta*